

## СТАТЬИ

621.865.8 : 681.327.12

## Расширенные гауссовы отображения

Б. К. П. ХОРН

## Extended Gaussian Images

BERTHOLD K. P. HORN

Статья представляет собой введение в проблему расширенных гауссовых отображений. Расширенные гауссовы отображения полезны для описания формы поверхностей. Они легко вычисляются

1) по игольчатым картам, которые получаются по данным стереофотометрии;

2) по глубинным картам, строящимся на основе показаний дальномерных устройств или бинокулярных стереодатчиков.

Существенно, что эти отображения можно также получать непосредственно по геометрическим моделям соответствующих объектов. Расширенные гауссовы отображения позволяют решать по крайней мере две задачи машинного зрения:

1) распознавание;

2) определение ориентации объекта в пространстве. В статье вводится определение расширенного гауссова отображения и рассматриваются некоторые его свойства. Представлено обобщение на невыпуклые объекты, приведен ряд примеров.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Для распознавания объекта и определения его ориентации в пространстве необходимо располагать способом представления формы его поверхности. Одним из таких способов является задание расстояний до поверхности вдоль параллельных лучей на сетке с регулярным шагом. Такое простое представление называется глубинной картой. Описания поверхности в такой форме дает дальномер, а также автоматический бинокулярный стереодатчик [1]. К сожалению, глубинные карты не поддаются простой трансформации при поворотах объекта. (Укажем прежде всего, что для построения новой глубинной карты на сетке с регулярным шагом следует прибегнуть к интерполяции.)

Другой способ — задание ориентации точек поверхности на некоторой регулярной дискретизирующей сетке. Такую сетку удобно строить так, чтобы она соответствовала элементам изображения. Это простое представление называется игольчатой картой (рис. 1) [2]. Установить ориентацию поверхности по набору изображений, полученных при различных условиях освещения, позволяет метод стереофотометрии [3—8], который и дает такую форму описания поверхности. Но если приходится сопоставлять поверхности объектов, которые могут поворачиваться друг относительно друга, то непосредственно пользо-

ваться игольчатой картой также нельзя. (Вид и глубинных, и игольчатых карт зависит как от ориентации объекта, так и от его положения.)

Напротив, для метода расширенных гауссовых отображений изменяющаяся ориентация объекта в пространстве, как мы увидим, никаких трудностей не создает [2, 9—13]. Во-первых, метод нечувствителен к положению объекта. При формировании расширенного гауссова отображения часть информации как бы отбрасывается, и тем не менее в случае выпуклых объектов данное представление, как это ни странно, оказывается единственным. Иначе говоря, никакие два выпуклых объекта не имеют одного и того же расширенного гауссова отображения.

Это представление формы поверхности объекта позволяет устанавливать соответствие между информацией от датчиков изображений или дальности и информацией, содержащейся в машинных моделях объектов, и оказалось чрезвычайно полезным при исследовании автоматического отбора элементов [14—16]. Недавно описана система, использующая данный метод для отбора одного объекта из беспорядочного нагромождения сходных объектов [17]. Наше обсуждение мы начнем с объектов, имеющих плоские грани, а затем рассмотрим объекты с гладкими криволинейными поверхностями. Мы изложим методы вычисления дискретных приближений расширенных гауссовых

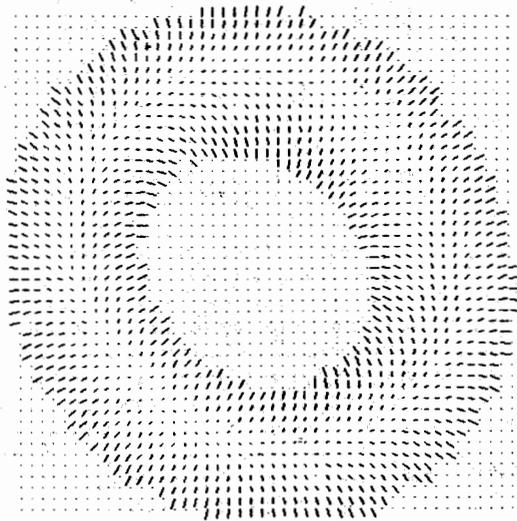


Рис. 1. Игольчатая карта дает картину единичных векторов нормали к поверхности в точках поверхности на регулярной сетке. Нормали, направленные к наблюдателю, выглядят как точки, а наклонные участки поверхности дают нормали в виде линий в направлении наискорейшего спуска.

Получена 31 декабря 1983 г., в исправленном виде — 18 июля 1984 г.

Ориг., с. 1671—1686.

This paper describes research done at the Artificial Intelligence Laboratory of the Massachusetts Institute of Technology. Support for the laboratory's artificial intelligence research is provided in part by the Office of Naval Research (ONR) under ONR Contract N00014-77C-0389 and in part by the Advanced Research Projects Agency of the Department of Defense under ONR Research Contract N00014-80-C-0505.

The author is with the Artificial Intelligence Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, USA.

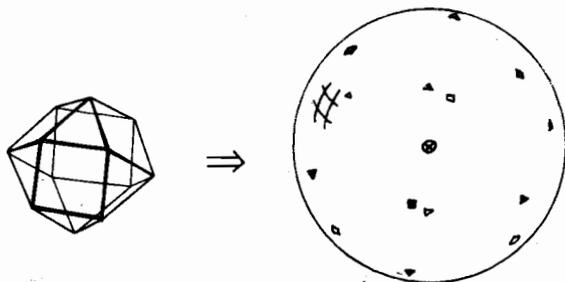


Рис. 2. Расширенное гауссово отображение многогранника можно рассматривать как набор точечных масс на гауссовой сфере. Каждая масса пропорциональна площади соответствующей грани. Точечные массы на видимой полусфере обозначены зачерненными метками, а остальные — светлыми. Если данный многогранник является замкнутым, то центр масс (отмеченный символом  $\otimes$ ) должен быть в центре сферы.

отображений, называемых гистограммами ориентаций. Гистограммы ориентаций можно вычислять по экспериментальным данным или математическим описаниям соответствующих объектов. Разделы, отмеченные звездочкой, можно опустить при первом чтении или когда математические выкладки не представляют для читателя особого интереса.

## II. ДИСКРЕТНЫЙ СЛУЧАЙ. ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

В 1897 г. Минковски показал, что выпуклый многогранник полностью определяется (вплоть до параллельного переноса) площадью и ориентацией своих граней [18—20]. Площадь и ориентацию граней удобно представить точечными массами на сфере. Представим себе, что единичный вектор нормали каждой грани перемещается таким образом, что его конец находится в центре единичной сферы. При этом начало единичного вектора нормали располагается на поверхности единичной сферы. Эта сфера называется гауссовой, а каждая ее точка соответствует определенной ориентации поверхности. Расширенное гауссово отображение рассматриваемого многогранника получается путем размещения в каждой точке массы, равной площади соответствующей грани (рис. 2).

С первого взгляда кажется, что при таком отображении часть информации теряется, так как не учитывается положение нормалей к поверхности. С другой стороны, ничего не говорится о форме граней и их соотношениях смежности. Тем не менее можно показать, что расширенное гауссово отображение единственным образом определяет (вплоть до параллельного переноса) выпуклый многогранник [9]. Недавно разработан итерационный алгоритм восстановления выпуклого многогранника по его расширенному гауссову отображению [21].

### А. Свойства расширенного гауссова отображения

Параллельный перенос объекта не оказывает влияния на расширенное гауссово отображение. Поворот объекта вызывает равный поворот расширенного гауссова отображения, так как единичные векторы нормали поворачиваются вместе с объектом.

Распределения масс, целиком расположенные в одном полушарии, т. е. обращенные в другом полу-

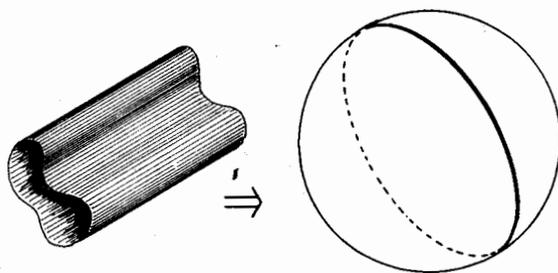


Рис. 3. Распределение масс, ограниченное большим кругом, соответствует пределу последовательности цилиндрических объектов с возрастающей длиной и убывающим диаметром. Такие аномальные распределения масс можно исключить, рассматривая только ограниченные объекты.

шарии в нуль, не соответствуют замкнутым объектам. Как будет показано, центр масс расширенного гауссова отображения должен располагаться в начале координат. Ясно, что это невозможно, если целое полушарие будет пустым. Кроме того, распределение масс, не обращенное в нуль только на большом круге сферы, соответствует пределу последовательности цилиндрических объектов увеличивающейся длины и уменьшающегося диаметра (рис. 3). Такого рода аномальные случаи мы рассматривать не будем и сосредоточим внимание на замкнутых ограниченных объектах [9, 20].

Существенную роль играют некоторые свойства расширенного гауссова отображения. Отметим, в первую очередь, что полная масса расширенного гауссова отображения, очевидно, в точности равна полной площади поверхности многогранника. Если многогранник замкнут, то со стороны любой пары противоположных направлений он будет иметь одинаковые площади проекций. Это позволяет вычислить местоположение центра масс расширенного гауссова отображения.

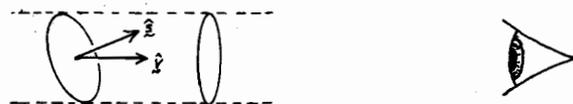


Рис. 4. Из-за перспективного укорочения элемент поверхности кажется меньшим. Видимая площадь равна истинной площади, умноженной на косинус угла между вектором нормали к поверхности и вектором, направленным к наблюдателю.

Представим себе выпуклый многогранник, рассматриваемый с большого расстояния. Пусть направление от объекта к наблюдателю задано единичным вектором  $\hat{v}$ . Грань с единичным вектором нормали к поверхности  $\hat{s}_i$  будет видимой только при  $\hat{s}_i \cdot \hat{v} \geq 0$ . Допустим, что площадь поверхности этой грани равна  $O_i$ . Из-за перспективного укорочения она будет выглядеть как грань с площадью, равной всего лишь

$$(\hat{s}_i \cdot \hat{v}) O_i,$$

расположенная по нормали к  $\hat{v}$  (рис. 4). Полная кажущаяся площадь видимой поверхности при наблюдении со стороны направления  $\hat{v}$  составляет

$$A(\hat{v}) = \sum_{(\hat{s}_i \cdot \hat{v} > 0)} (\hat{s}_i \cdot \hat{v}) O_i.$$

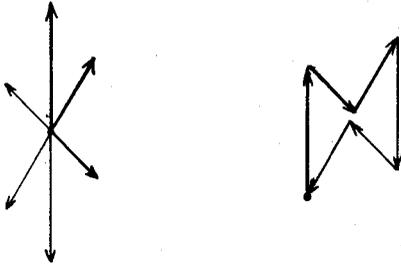


Рис. 5. Векторы, параллельные нормальям граней многогранника, длины которых равна площади соответствующих граней, при совпадении начала одного с концом второго образуют замкнутую цепь.

При наблюдении с противоположного направления полная кажущаяся площадь видимой поверхности будет равна

$$A(-\hat{v}) = \sum_{(i, \hat{v} \cdot \hat{v}_i < 0)} (s_i \cdot \hat{v}) O_i.$$

Обе эти площади должны быть одинаковы, т. е.  $A(\hat{v}) = A(-\hat{v})$ . Следовательно,

$$\sum_{\text{все } i} (s_i \cdot \hat{v}) O_i = \left[ \sum_{\text{все } i} s_i O_i \right] \cdot \hat{v} = 0,$$

причем теперь суммирование проводится по всем граням объекта. Это соотношение справедливо для всех векторов  $\hat{v}$ , поэтому должно соблюдаться условие

$$\sum_{\text{все } i} s_i O_i = 0.$$

Иначе говоря, центр масс расширенного гауссова отображения располагается в начале координат.

Эквивалентное представление, носящее название шквовой модели, имеет вид набора векторов, каждый из которых параллелен одной из нормалей к поверхности и имеет длину, равную площади соответствующей грани. Результат, полученный выше для центра масс, равносителен утверждению, что при последовательном размещении этих векторов образуется замкнутая цепь (рис. 5).

### В. Восстановление тетраэдра (\*)

Грани с общим ребром называют смежными. Массы на гауссовой сфере, соответствующие двум смежным граням, не обязательно располагаются в ближайшем соседстве. В общем случае восстановление многогранника по его расширенному гауссову отображению — задача непростая, так как нелегко установить, какие грани являются смежными [21]. Нахождение действительных смещений каждой грани относительно центра масс многогранника — это менее трудная задача.

Однако тетраэдр имеет очень простую структуру: каждая грань является смежной с тремя другими. Форма тетраэдра полностью определяется нормальями смеющихся четырех граней, и остается лишь определить размер тетраэдра. Иначе говоря, остается лишь одна степень свободы. Есть и другой способ, учитывающий, что площади всех четырех граней должны

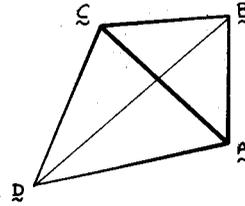


Рис. 6. Тетраэдр с вершинами A, B, C и D. Требуется найти расстояния граней от центра масс, если известны площади и векторы нормалей к граням.

быть такими, чтобы центр масс расширенного гауссова отображения, как мы только что убедились, оказался в начале координат. Это условие налагает на рассматриваемые четыре параметра три ограничения.

Обозначим заданные единичные векторы нормалей через  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{c}$  и  $\hat{d}$ , а площади соответствующих граней — через A, B, C и D (рис. 6). Требуется определить расстояния a, b, c и d этих граней от центра масс тетраэдра. Зная эти расстояния, можно, если потребуется, вычислить положения вершин A, B, C и D просто по пересечениям рассматриваемых трех плоскостей. Применяемые здесь обозначения таковы, что грань, противоположная вершине A, имеет площадь A и единичный вектор нормали  $\hat{a}$  и т. д.

Расстояние по перпендикуляру от центра площади треугольника до одной из сторон составляет одну треть расстояния по перпендикуляру до противоположной этой стороне вершины. Аналогично, в тетраэдре расстояние от центра масс до определенной грани равно четверти расстояния до противоположной этой грани вершины. Начнем с вывода формулы, определяющей расстояние от грани с площадью, скажем, D, до противоположной вершины  $\hat{d}$ . Искомое расстояние d будет в точности равно четверти найденной величины. Остальные три расстояния a, b и c можно затем вычислить по формулам, полученным путем циклической перестановки соответствующих величин.

Положение восстановленного тетраэдра будет произвольным, так как расширенное гауссово отображение нечувствительно к параллельному сдвигу. Чтобы сделать результат однозначным, можно поместить центр масс в начало координат. Однако, чтобы наши выражения не были громоздкими, удобно так сместить тетраэдр, чтобы в начале координат оказалась одна вершина, скажем D. Очевидно, что на расстояния граней до центра масс это не повлияет.

Допустим пока, что местоположения вершин A, B и C относительно D нам известны. Тогда направления всех шести ребер тетраэдра можно вычислить, определяя все отдельные попарные разности положений четырех вершин. Вычисляя далее векторные произведения этих векторов направлений ребер, можно найти четыре вектора нормалей. Для этой цели фактически потребуются всего четыре вектора ребер, образующих замкнутый контур. Нормируя затем полученные результаты, найдем единичные векторы нормалей:

$$\hat{a} = -\frac{B \times C}{|B \times C|}, \quad \hat{b} = -\frac{C \times A}{|C \times A|}, \quad \hat{c} = -\frac{A \times B}{|A \times B|},$$

$$\hat{d} = \frac{(A - C) \times (B - A)}{|(A - C) \times (B - A)|} = \frac{A \times B + B \times C + C \times A}{|A \times B + B \times C + C \times A|}$$

Расстояние по перпендикуляру от плоскости с площадью  $D$  до начала координат можно теперь найти, вычисляя скалярное произведение любой из трех вершин  $A, B$  и  $C$  и единичного вектора нормали  $\hat{d}$ . Таким образом,

$$4d = \hat{d} \cdot A = \hat{d} \cdot B = \hat{d} \cdot C = \frac{[ABC]}{|A \times B + B \times C + C \times A|}$$

Легко вычисляется также площадь грани, противоположной началу координат:

$$D = \frac{1}{2} |(A - C) \times (B - A)| = \frac{1}{2} |A \times B + B \times C + C \times A|$$

Предстоит теперь выразить смещение  $d$  через площадь  $D$  и заданные единичные векторы нормалей. Сделать это непосредственно с помощью двух вышеприведенных формул нельзя, так как нам неизвестна величина  $[ABC]$ . Она, между прочим, в шесть раз больше объема тетраэдра  $V$ , равного

$$V = \frac{1}{3} (4d) D = \frac{1}{6} [ABC]$$

Рассмотрим, далее, по отдельности четыре смешанных произведения четырех единичных векторов нормалей. Укажем прежде всего, что

$$[\hat{a}\hat{b}\hat{c}] = -\frac{[ABC]^2}{|A \times B||B \times C||C \times A|}$$

так как  $[(x \times y)(y \times z)(z \times x)] = [xyz]^3$ . Рассуждая аналогичным образом, получаем

$$[\hat{a}\hat{b}\hat{d}] = \frac{[ABC]^2}{|B \times C||C \times A||A \times B + B \times C + C \times A|}$$

поскольку  $[xy(x+y+z)] = [xyz]$ . Формулы для  $[\hat{b}\hat{c}\hat{d}]$  и  $[\hat{c}\hat{a}\hat{d}]$  можно получить путем циклической перестановки величин.

Перемножив полученные таким образом три формулы, приходим к соотношению

$$[\hat{a}\hat{b}\hat{d}][\hat{b}\hat{c}\hat{d}][\hat{c}\hat{a}\hat{d}] = \frac{[ABC]^6}{(A \times B)^2(B \times C)^2(C \times A)^2|A \times B + B \times C + C \times A|^3}$$

откуда

$$\frac{[\hat{a}\hat{b}\hat{d}][\hat{b}\hat{c}\hat{d}][\hat{c}\hat{a}\hat{d}]}{[\hat{a}\hat{b}\hat{c}]^2} = \frac{[ABC]^2}{|A \times B + B \times C + C \times A|} = (4d)^2(2D)$$

В итоге получаем

$$4d = \frac{\sqrt{(2D)[\hat{a}\hat{b}\hat{d}][\hat{b}\hat{c}\hat{d}][\hat{c}\hat{a}\hat{d}]}}{-[\hat{a}\hat{b}\hat{c}]}$$

Расстояния  $a, b$  и  $c$  можно вычислить по аналогичным формулам, выводимым посредством циклических перестановок соответствующих величин.

### III. НЕПРЕРЫВНЫЙ СЛУЧАЙ. ОБЪЕКТЫ С ГЛАДКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Изложенные в предыдущем разделе идеи можно распространить на случай объектов с гладкой криволинейной поверхностью.

#### А. Гауссово отображение

Точку на гауссовой сфере можно связать с заданной точкой на поверхности, отыскивая на этой сфере точку с таким же вектором нормали (рис. 7) [20, 22, 25]. Следовательно, возможно отображение информации, связанной с точками на поверхности, в точки на гауссовой сфере. В случае выпуклого объекта, имеющего повсюду положительную гауссову кривизну, никакие две точки не имеют одного и того же вектора нормали.

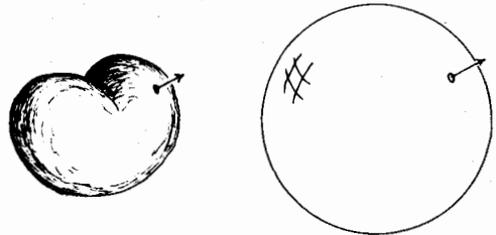


Рис. 7. Гауссово отображение объекта получается путем ассоциирования каждой точки его поверхности с точкой на гауссовой сфере с такой же ориентацией поверхности. Для объектов, имеющих повсюду положительную гауссову кривизну, отображение обратимо.

Отображение объекта на гауссову сферу в этом случае обратимо: каждой точке на гауссовой сфере соответствует единственная точка на поверхности. (Если рассматриваемая выпуклая поверхность содержит участки с нулевой гауссовой кривизной, то единственной точке на гауссовой сфере могут соответствовать кривые или даже области на поверхности.)

Гауссово отображение имеет то полезное свойство, что оно поворачивается при повороте объекта. Рассмотрим два параллельных вектора нормали, один — на объекте, а другой — на гауссовой сфере. При одинаковых поворотах объекта и гауссовой сферы обе нормали останутся параллельными. Таким образом, повороту объекта соответствует такой же поворот гауссовой сферы.

#### В. Гауссова кривизна

Рассмотрим малый участок на объекте  $\delta O$ . Каждая точка этого участка соответствует определенной точке на гауссовой сфере. Участок  $\delta O$  на объекте отображается в участок, скажем,  $\delta S$ , на гауссовой сфере (рис. 8). Если поверхность сильно искривлена, то нормали в точках участка образуют широкий веер направлений. Соответствующие точки на гауссовой сфере окажутся разбросанными. Наоборот, если поверхность плоская, то векторы нормали будут параллельны и отобразятся в единственную точку.

Из этих соображений вытекает удобное определение кривизны. Гауссова кривизна определяется как предел отношения двух этих площадей, когда она

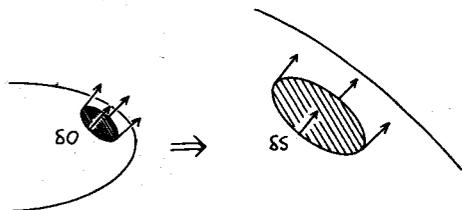


Рис. 8. Участок на объекте отображается в участок на гауссовой сфере. Гауссова кривизна — это предел отношения площади участка на гауссовой сфере к площади участка на предмете, когда они становятся все меньше и меньше.

стремятся к нулю, т. е.

$$K = \lim_{\delta O \rightarrow 0} \frac{\delta S}{\delta O} = \frac{dS}{dO}.$$

Из этого дифференциального соотношения можно получить два полезных интеграла. Рассмотрим сначала интеграл  $K$  по конечному участку  $O$  на объекте:

$$\iint_O K dO = \iint_S dS = S,$$

где  $S$  — площадь соответствующего участка на гауссовой сфере. Левая часть приведенного выражения называется интегральной кривизной. Это соотношение позволяет манипулировать с поверхностями, векторы нормали которых имеют разрывы.

Рассмотрим теперь интеграл от  $1/K$  по участку  $S$  на гауссовой сфере

$$\iint_S 1/K dS = \iint_O dO = O,$$

где  $O$  — площадь соответствующего участка на объекте. Из этого соотношения следует, что при определении расширенного гауссова отображения объекта с гладкой криволинейной поверхностью следует использовать обратную величину гауссовой кривизны. Ниже мы в этом удостоверимся. Между прочим, оно показывает также, что интеграл от  $1/K$  по всей гауссовой сфере равен полной площади объекта.

### С. Другое определение гауссовой кривизны

Рассмотрим плоскость, в которой расположен вектор нормали в точке на гладкой поверхности. Эта поверхность пересекает данную плоскость по кривой, называемой нормальным сечением (рис. 9) [19, 22—25]. Обозначим кривизну нормального сечения через  $\kappa_N$ . Рассмотрим однопараметрическое семейство плоскостей, содержащих вектор нормали к поверхности. Пусть  $\theta$  есть угол между конкретной плоскостью и заданной опорной плоскостью. Тогда  $\kappa_N$  будет представлять собой периодическую функцию от  $\theta$ . Более того, если измерять  $\theta$  относительно плоскости, которая дает максимальную кривизну, то можно показать, что

$$\kappa_N(\theta) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta,$$

где  $\kappa_1$  — максимальная, а  $\kappa_2$  — минимальная кривизна. Эти две величины называются величинами главной кривизны, а соответствующие плоскости — глав-

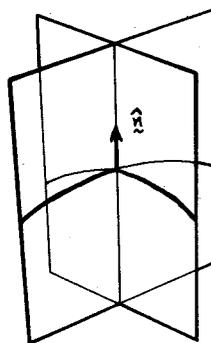


Рис. 9. Нормальные сечения поверхности плоскостями, содержащими нормаль к поверхности. Плоскости, соответствующие наибольшему и наименьшему значениям кривизны, называются главными. Гауссова кривизна равна произведению наибольшей и наименьшей величин кривизны.

ными плоскостями. Если главные кривизны различны, то две главные плоскости перпендикулярны (рис. 9). Оказывается, что величина

$$K = \kappa_1 \kappa_2$$

равна введенной ранее гауссовой кривизне. Очевидно, что для плоскости она равна нулю. Для сферической поверхности радиуса  $R$  эта величина равна  $1/R^2$ , так как кривизна любого нормального сечения равна  $1/R$ .

Линейчатая поверхность — это поверхность, образуемая в результате перемещения линии в пространстве. Одним из примеров такой поверхности служит гиперболоид. Частными случаями линейчатых поверхностей являются развертывающиеся поверхности [22, 23, 25]. Примерами развертывающихся поверхностей служат цилиндрическая и коническая поверхности (рис. 10). Для развертывающейся поверхности по крайней мере одна из величин главной кривизны оказывается нулевой во всех точках и поэтому повсюду будет равна нулю и гауссова кривизна.

### Д. Расширенное гауссово отображение

Можно определить отображение, которое связывает обратную величину гауссовой кривизны в точке на поверхности объекта с соответствующей точкой на гауссовой сфере. Обозначим через  $u$  и  $v$  параметры, используемые для идентификации точек на исходной

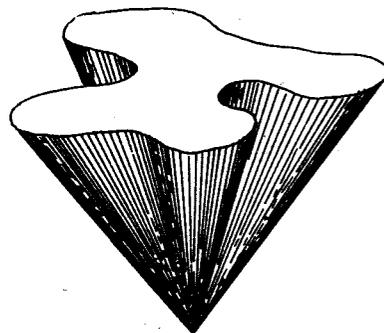


Рис. 10. Коническая поверхность служит примером развертывающейся поверхности; гауссова кривизна повсюду равна нулю, так как (по крайней мере) одна из главных кривизн равна нулю.

поверхности, а через  $\xi$  и  $\eta$  — параметры, которые служат для идентификации точек на гауссовой сфере. (Это могут быть, например, долгота и широта.) Будем тогда определять расширенное гауссово отображение в виде

$$G(\xi, \eta) = \frac{1}{K(u, v)},$$

где  $(\xi, \eta)$  — точка на гауссовой сфере с такой же нормалью, как точка  $(u, v)$  на исходной поверхности. Можно показать, что для выпуклых объектов это отображение является однозначным (вплоть до параллельного переноса), т. е. определенному расширенному гауссову отображению соответствует лишь один выпуклый объект [9, 19, 26]. Доказательство, к сожалению, неконструктивно, и прямой метод восстановления объекта неизвестен.

### Е. Свойства расширенного гауссова отображения

Центр масс расширенного гауссова отображения объекта с гладкой криволинейной поверхностью находится в начале координат. Мы докажем это способом, аналогичным тому, которым мы пользовались выше в отношении расширенного гауссова отображения объектов в виде многогранников. Рассмотрим случай наблюдения выпуклого объекта с большого расстояния. Пусть направление от объекта к наблюдателю задается единичным вектором  $\hat{v}$ . Участок поверхности с единичным вектором нормали  $\hat{s}$  будет видим только при условии  $\hat{s} \cdot \hat{v} \geq 0$ . Пусть площадь этого участка равна  $\delta O$  (рис. 4). Из-за перспективного укорочения он будет выглядеть как участок с площадью, равной всего лишь

$$(\hat{s} \cdot \hat{v}) \delta O,$$

расположенный по нормали к  $\hat{v}$ . Обозначим через  $H(\hat{v})$  единичную полусферу, для которой  $\hat{s} \cdot \hat{v} \geq 0$ . Тогда кажущаяся площадь видимой поверхности при наблюдении с направления  $\hat{v}$  будет равна

$$A(\hat{v}) = \int_{H(\hat{v})} G(\hat{s})(\hat{s} \cdot \hat{v}) dS.$$

Кажущаяся площадь видимой поверхности при наблюдении с противоположного направления есть

$$A(-\hat{v}) = \int_{H(-\hat{v})} G(\hat{s})(\hat{s} \cdot -\hat{v}) dS.$$

Эти площади должны быть одинаковы, т. е.  $A(\hat{v}) = A(-\hat{v})$ . Следовательно,

$$\iint_S G(\hat{s})(\hat{s} \cdot \hat{v}) dS = \left( \iint_S G(\hat{s}) \hat{s} dS \right) \cdot \hat{v} = 0,$$

где интегрирование теперь выполняется по всей сфере  $S$ . Это справедливо для всех векторов  $\hat{v}$ , и поэтому должно выполняться условие

$$\iint_S G(\hat{s}) \hat{s} dS = 0.$$

Таким образом, центр масс расширенного гауссова отображения находится в начале координат. (Это ограничение, между прочим, особой практической роли не играет, так как обычно видна лишь одна сторона объекта.)

Легко доказывается и другое свойство расширенного гауссова отображения. Его полная масса равна полной площади поверхности объекта. Если объекты имеют одинаковую форму, но разные размеры, расширенное гауссово отображение можно пронормировать, поделив его на полную массу.

Можно рассматривать расширенное гауссово отображение, исходя из плотности массы на гауссовой сфере. При этом возможна логически обоснованная манипуляция с областями поверхности, где гауссова кривизна обращается в нуль, с применением рассмотренного выше интеграла от  $1/K$ . Например, плоская область соответствует точечной массе, а последняя в свою очередь соответствует на гауссовой сфере импульсной функции, величина которой пропорциональна площади плоской области.

Распределение масс обладает моментом инерции относительно оси, проходящей через его центр масс, который зависит от направления этой оси. Указанный момент инерции принимает три фиксированных значения, соответствующих трем определенным ортогональным направлениям, называемым главными осями объекта. Заманчиво предположить, что, сопоставляя главные оси инерции наблюдаемого расширенного гауссова отображения с вычисленными по геометрической модели, можно найти ориентацию объекта [9]. Это представляло бы собой довольно простую задачу, требующую только вычисления собственных векторов  $3 \times 3$ -матрицы инерции. На практике обычно имеют информацию лишь о видимой полусфере, и поэтому невозможно вычислить требующиеся первый и второй моменты по всей сфере.

### Ф. Невыпуклые объекты

Если поверхность невыпуклая, то возникают три обстоятельства:

1. Гауссова кривизна в некоторых точках будет отрицательной.
2. Вклад в данную точку на гауссовой сфере вносит не одна точка объекта.
3. Одни части объекта могут затеняться другими частями.

Мы намереваемся расширить определение расширенного гауссова отображения в этом случае и считать, что это отображение выражается суммой абсолютных значений обратных величин гауссовой кривизны во всех точках с одинаковой ориентацией поверхности:

$$G(\xi, \eta) = \sum_i \frac{1}{|K(u, v)|}.$$

Это определение обосновано методом вычисления расширенного гауссова отображения в дискретном случае, который мы рассмотрим ниже.

Приведенное расширенное определение имеет смысл если существует конечное или по крайней мере счетное число точек на поверхности с одинаковой ориентацией. Однако случается, что все точки на кривой или

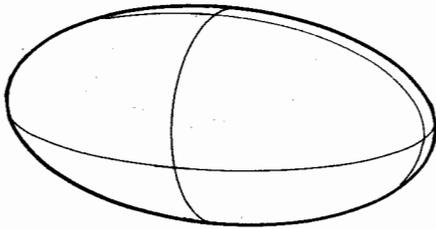


Рис. 11. Эллипсоид с контурами, образованными при рассечении поверхности тремя ортогональными плоскостями, проходящими через пары точек, в которых гауссова кривизна имеет постоянные величины.

даже на области поверхности имеют параллельные нормали к поверхности. Тогда мы вправе воспользоваться соотношением

$$G(\hat{n}) = \int_S \int \delta(\hat{n} - \hat{s}) \int_O \int \delta(\hat{o} - \hat{s}) dO dS,$$

где  $\hat{n}$  — единичный вектор на гауссовой сфере, а  $\hat{s}$  — единичный вектор на поверхности объекта. Интегрирование выполняется по всей поверхности объекта  $O$ , причем  $\delta$  — единичная импульсная функция, определяемая на сфере.

Для большей определенности можно обозначить через  $r(u, v)$  вектор, который задает на поверхности точку, соответствующую параметрам  $u$  и  $v$ . Тогда

$$G(\xi, \eta) \cos \eta = \iint \delta(\xi - \theta(u, v), \eta - \phi(u, v)) \times |r_u \times r_v| du dv,$$

где  $\theta(u, v)$  и  $\phi(u, v)$  — широта и долгота точки на гауссовой сфере с той же ориентацией, что и поверхность объекта в точке  $(u, v)$ . Таким образом, плоская область площадью  $A$  будет нести в расширенное гауссово отображение импульс с весом  $A$ , а цилиндрическая область вызовет появление импульсной стенки, проходящей вдоль большого круга под прямыми углами к оси цилиндра. Интеграл от этой импульсной стенки будет равен площади цилиндрической области.

Обычно расширенное гауссово отображение мы представляем себе как фиксированный предмет, связанный с объектом. В случае невыпуклых объектов может потребоваться изменить определение, с тем чтобы оно охватывало лишь те части поверхности, которые видны с определенного направления. Такое (модифицированное) гауссово отображение будет зависеть от точки наблюдения. Мы не будем затрагивать здесь это потенциальное осложнение.

**6. Примеры расширенного гауссова отображения<sup>(\*)</sup>**

Как уже упоминалось, расширенное гауссово отображение сферы радиуса  $R$  есть

$$G(\xi, \eta) = R^2.$$

Пожалуй, несколько больший интерес представляет случай эллипсоида с полуосями  $a, b$  и  $c$ , совпадающими с осями координат (рис. 11). Его поверх-

ность описывается уравнением

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

Для наших целей полезнее его параметрическая форма

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta \cos \phi, \\ y &= b \sin \theta \cos \phi, \\ z &= c \sin \phi. \end{aligned}$$

Нормаль к поверхности в точке

$$r = (a \cos \theta \cos \phi, b \sin \theta \cos \phi, c \sin \phi)^T$$

определяется уравнением

$$n = (bc \cos \theta \cos \phi, ca \sin \theta \cos \phi, ab \sin \phi)^T,$$

в чем мы убедимся ниже. Гауссова кривизна оказывается равной

$$K = \left[ \frac{abc}{(bc \cos \theta \cos \phi)^2 + (ca \sin \theta \cos \phi)^2 + (ab \sin \phi)^2} \right]^2 = \left[ \frac{abc}{n^2} \right]^2,$$

где  $n^2 = n \times n$ .

Если обозначить через  $\xi$  долготу, а через  $\eta$  — широту на гауссовой сфере, то единичный вектор нормали в точке  $(\xi, \eta)$  на этой сфере будет определяться уравнением (рис. 12)

$$\hat{n} = (\cos \xi \cos \eta, \sin \xi \cos \eta, \sin \eta)^T.$$

Здесь  $n = n \hat{n}$ . Отождествляя члены в двух этих выражениях для нормалей к поверхности в соответствующих точках на эллипсоиде и на гауссовой сфере, получаем

$$\begin{aligned} bc \cos \theta \cos \phi &= n \cos \xi \cos \eta, \\ ca \sin \theta \cos \phi &= n \sin \xi \cos \eta, \\ ab \sin \phi &= n \sin \eta, \end{aligned}$$

откуда

$$n^2 [(a \cos \xi \cos \eta)^2 + (b \cos \xi \sin \eta)^2 + (c \sin \eta)^2] = (abc)^2.$$

Наконец, после подстановки выражения для  $n^2$  в уравнение для  $K$  приходим к соотношению

$$G(\xi, \eta) = \frac{1}{K} = \left[ \frac{abc}{(a \cos \xi \cos \eta)^2 + (b \sin \xi \cos \eta)^2 + (c \sin \eta)^2} \right]^2.$$

В этом случае расширенное гауссово отображение меняется плавно и принимает стационарные значения

$$\left(\frac{bc}{a}\right)^2, \left(\frac{ca}{b}\right)^2 \text{ и } \left(\frac{ab}{c}\right)^2$$

в точках, где  $r$  равно соответственно  $(\pm 1, 0, 0)^T$ ,  $(0, \pm 1, 0)^T$  и  $(0, 0, \pm 1)^T$ . В справедливости этих результатов легко удостовериться, рассекая эллипсоид пло-

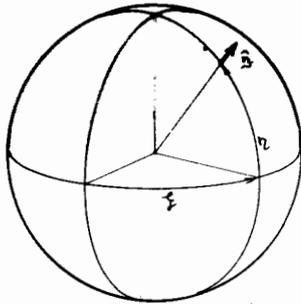


Рис. 12. Для идентификации точек на гауссовой сфере можно использовать долготу и широту. Каждая точка на гауссовой сфере соответствует единственной ориентации поверхности.

скостями  $xu$ ,  $uz$  и  $zx$ . Гауссова кривизна в этом случае равна произведению кривизн получающихся эллипсов. Здесь используется тот факт, что максимальная и минимальная кривизны на эллипсе с полуосями  $a$  и  $b$  равны  $a/b^2$  и  $b/a^2$ .

Ниже мы выведем расширенное гауссово отображение тора, не являющегося выпуклым объектом.

#### IV. ДИСКРЕТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ. ИГОЛЬЧАТЫЕ КАРТЫ

Рассмотрим поверхность, разбитую на малые участки равной площади. Пусть на единичную площадь приходится  $p$  участков. Проведем на каждом участке нормаль к поверхности. Рассмотрим многогранный объект, образующийся при пересечении касательных плоскостей, перпендикулярных к этим нормальям. Он аппроксимирует исходную поверхность, причем, чем меньше участки, тем лучше приближение.

Расширенное гауссово отображение исходного выпуклого объекта (с гладкой криволинейной поверхностью) аппроксимируется импульсными функциями, соответствующими указанным малым участкам. Величина каждого импульса равна примерно  $1/p$  и соответствует площади участка, на котором он находится (рис. 13). Сильно искривленные части дадут на гауссовой сфере импульсы, распределенные на большой области; импульсы же от почти плоских частей будут сконцентрированы в малой области. По мере увеличения  $p$  число импульсов, приходящихся на единицу площади гауссовой сферы, приближается к величине гауссовой кривизны, умноженной на  $p$ . В этом можно удостовериться с помощью приведенного выше интеграла от  $1/K$ .

Образование двумерных сот на поверхности может иметь в своей основе произвольное разбиение на треугольные участки, при условии что величина каждого импульса на гауссовой сфере будет пропорциональна площади соответствующего участка поверхности. Можно также разбивать поверхность, исходя из деления изображения на элементы. В таком случае необходимо учитывать, что на площадь, занимаемую на изображении данным участком, влияет перспективное укорочение. Фактическая площадь поверхности пропорциональна  $1/(s_i \cdot \varphi)$ , где  $s_i$  — вектор нормали участка, а  $\varphi$  — вектор, направленный в сторону наблюдателя (рис. 4).

Данные измерений ориентации поверхности на изображениях не будут точными, так как на ре-

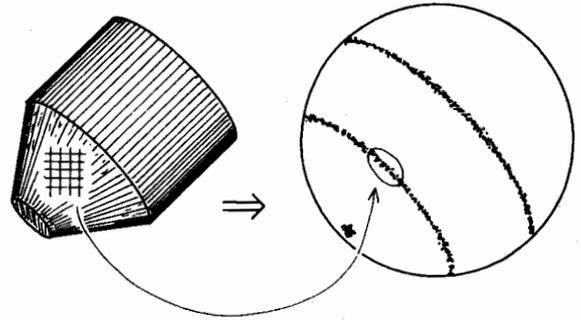


Рис. 13. Отображение дискретных участков объекта на гауссову сферу. Участки в этом случае соответствуют регулярному разбиению плоскости отображения. Так как участки расположены на конической поверхности, их вклад в расширенное гауссово отображение располагается по небольшой окружности.

зультаты измерений яркости оказывают влияние шумов. Аналогично с некоторыми погрешностями будут определяться ориентации поверхностей и по данным о дальности. Поэтому импульсы на гауссовой сфере будут немного смещены относительно их истинных положений. Тем не менее ожидаемая плотность на гауссовой сфере будет приближаться к обратной величине гауссовой кривизны. Однако не следует ожидать, что импульсы, соответствующие плоской поверхности, совпадут. Скорее всего они образуют небольшую группу. Точнее, влияние шумов сводится к «размазыванию» информации по сфере. Расширенное гауссово отображение подвергается операции свертки со сглаживающей функцией, ширина которой пропорциональна уровню шумов.

#### A. Использование моделей объектов

Расширенные гауссовы отображения приходится также вычислять для поверхностей моделей объектов-прототипов. В этом случае целесообразнее найти удобный способ параметризации поверхности и разбиения ее на множество малых участков. Допустим, что поверхность задана двумя параметрами  $u$  и  $v$  в виде  $r(u, v)$ . Тогда, как видно из рис. 14,  $r_u$  и  $r_v$  будут представлять собой две касательные в точке  $(u, v)$ . Векторное произведение этих касательных направлено

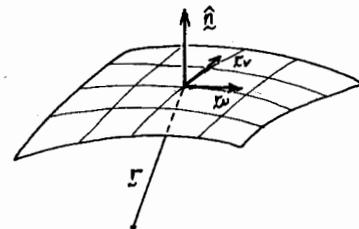


Рис. 14. Вектор нормали к поверхности можно вычислить, найдя векторное произведение двух касательных векторов. Касательные векторы можно получить, дифференцируя уравнение поверхности, выраженное в параметрической форме.

по нормали к поверхности. По единичному вектору нормали

$$\hat{n} = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

можно определить, какой точке гауссовой сферы соответствует данный участок. Допустим, что область изменения  $u$  разбита на отрезки длиной  $\delta u$ , а область изменения  $v$  — на отрезки  $\delta v$ . Тогда по площади участка, равной

$$\delta A = |r_u \times r_v| \delta u \delta v,$$

можно определить, какой вклад этот участок создает в соответствующем месте на гауссовой сфере. Заметим, что при этом не приходится в явном виде вычислять гауссову кривизну или брать вторые частные производные.

#### У. ОБРАЗОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ СОТ НА ГАУССОВОЙ СФЕРЕ. ГИСТОГРАММЫ ОРИЕНТАЦИЙ

Для представления информации на гауссовой сфере в ЭВМ целесообразно разбить сферу на элементы. В идеале эти элементы должны удовлетворять следующим критериям:

1. Все элементы должны иметь одинаковую площадь.
2. Все элементы должны быть одинаковой формы.
3. Элементы должны иметь правильную форму и быть компактными.
4. Разбиение должно быть достаточно мелким, обеспечивающим хорошее угловое разрешение.
5. При некоторых поворотах должно обеспечиваться самосовмещение элементов.

Компактные элементы объединяют информацию только от участков поверхности с почти одинаковой ориентацией. Удлиненные элементы той же площади объединяют информацию от участков поверхности с сильнее различающимися ориентациями. Площадь правильного  $n$ -угольника с  $n$  сторонами, вписанного в окружность радиуса  $r$ , равна

$$\pi r^2 \left[ \frac{\sin(2\pi/n)}{(2\pi/n)} \right].$$

Так, площадь вписанного в окружность шестиугольника равна  $(3\sqrt{3}/2)r^2$ , т. е. вдвое больше вписанного в такую же окружность треугольника. Таким образом, разбиения на элементы, близкие к треугольникам, будут объединять информацию об ориентациях, количество в которых в  $\sqrt{2}$  раз больше отклоняется от среднего значения, чем в случае разбиения на элементы, близкие к шестиугольникам.

Если элементы образуют регулярную структуру, то взаимосвязь элемента с соседними элементами будет одинаковой для всех элементов. Таким структурам следует отдавать предпочтение. К сожалению, удовлетворить одновременно всем перечисленным критериям невозможно.

Простой способ разбиения заключается в разделении на широтные полосы, каждая из которых затем разделяется на полоски по долготе (рис. 15). Добиться уравнивания площадей элементов можно, уменьшая



Рис. 15. Гауссову сферу можно разделить на элементы по меридианам и широтам. Однако получающиеся элементы имеют неодинаковые площади и совмещаются друг с другом только при определенных поворотах вокруг оси, проходящей через полюсы.

их число с повышением широты или увеличивая ширину широтных полос на высоких широтах либо за счет и того, и другого. Этот способ имеет то достоинство, что легко рассчитать, к какому элементу следует отнести данный вектор нормали к поверхности. Все же такая структура не удовлетворяет сформулированным выше критериям. В частности, совмещение элементов происходит лишь при немногих поворотах вокруг оси шара. Повороты относительно любой другой оси не дают совмещения элементов.

#### А. Разбиения, основанные на правильных многогранниках

Лучшие разбиения можно найти, проектируя на единичную сферу правильные многогранники, центры которых предварительно совмещены с центром сферы [27]. Правильные многогранники регулярны, а их грани представляют собой правильные многоугольники одного и того же типа. (Они называются также платоновыми телами) [19, 20, 28—32]. Вершины правильного многогранника конгруэнтны. Деление, получаемое путем проецирования правильного многогранника, обладает тем желательным свойством, что получающиеся элементы имеют одинаковую форму и площадь. Кроме того, все элементы имеют одинаковую геометрическую связь с соседними элементами. В случае додекаэдра элементы еще и очень хорошо закруглены, однако этот многогранник имеет всего двенадцать элементов (рис. 16а). Даже икосаэдр со своими двадцатью треугольными элементами дает слишком грубую дискретизацию ориентаций (рис. 16б), к тому же эти элементы недостаточно закруглены.

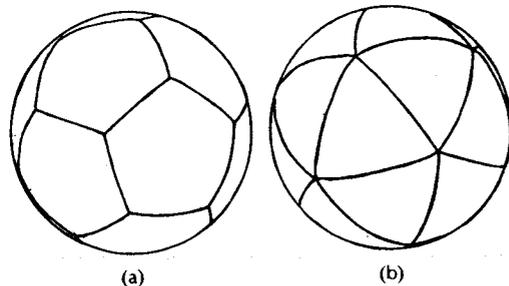


Рис. 16. Образование сот на гауссовой сфере: (а) типа правильного додекаэдра; (б) типа правильного икосаэдра.

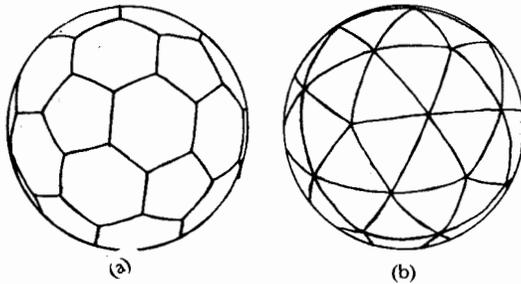


Рис. 17. Образование сот на гауссовой сфере: (а) типа усеченного икосаэдра; (б) типа пентакис-додекаэдра.

К сожалению, существует всего пять правильных тел (тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр).

Можно пойти несколько дальше, обращаясь к полуправильным многогранникам. В полуправильном многограннике грани представляют собой правильные многоугольники, но не все они одного рода [19, 20, 28—32]. (Они называются также архимедовыми многогранниками.) Как и в случае правильных многогранников, вершины конгруэнтны. Грани могут быть двух или трех типов, которые различаются по площади. Иллюстрацией разбиения с помощью полуправильного многогранника может служить футбольный мяч (рис. 17а). В его основе усеченный икосаэдр, т. е. полуправильный многогранник с 12 пятиугольными и 20 шестиугольными гранями.

К сожалению, существует всего 13 полуправильных многогранников. (Пять усеченных правильных многогранников, кубоктаэдр, икосидодекаэдр, укороченный кубоктаэдр, укороченный икосидодекаэдр, усеченный кубоктаэдр, ромбикубоктаэдр, усеченный икосидодекаэдр и ромбикосидодекаэдр.) В целом эти объекты не дают достаточно тонких разбиений. Укороченный икосидодекаэдр имеет наибольшее число граней, но каждый из его 80 треугольников много меньше каждого из его 12 пятиугольников.

Все ребра полуправильного многогранника имеют одинаковую длину. Отсюда следует, что разные типы его граней имеют разные площади. Площадь правильного многоугольника с  $n$  сторонами и длиной грани  $e$  равна

$$\frac{ne^2}{4 \operatorname{tg}(\pi/n)},$$

т. е. в очень грубом приближении пропорциональна  $n^3$ . С этим обычно связаны трудности в случае полуправильных многогранников. Иногда оказывается возможным построить новый многогранник с тем же соотношением смежности, что и заданный полуправильный многогранник, но с гранями одинаковой площади. Однако некоторые из таких граней уже не будут правильной формы.

Если требуется еще более тонкое дополнительное разделение, можно попробовать разбить каждую грань данного вида разбиения еще на треугольники. Например, если каждую пятиугольную грань додекаэдра разбить на пять одинаковых треугольников, получится пентакис-додекаэдр с 60 гранями (рис. 17б). Он оказывается дуальным рассмотренному выше усеченному икосаэдру. Если же этот метод применить к

усеченному икосаэдру, получим объект со 180 гранями. Как мы увидим ниже, этот объект, подобно пентакис-додекаэдру, можно подвергнуть дальнейшему разбиению.

Чтобы установить, насколько тонкое разбиение может потребоваться, рассчитаем угловой разброс нормалей к поверхности, которые отображаются в определенный элемент. Если имеется  $n$  равных элементов, то площадь каждого будет составлять

$$A = (4\pi)/n,$$

так как полная площадь единичной сферы равна  $4\pi$ . (Эта площадь равна телесному углу конуса, образованного данным элементом при соединении с центром сферы.) Форма, минимизирующая угловой разброс при заданной площади поверхности,— это круговой диск. Площадь кругового диска на единичной сфере есть

$$A = 2\pi(1 - \cos \theta),$$

где  $\theta$  — половинный угол конуса, образованного при соединении диска с центром сферы. При малых  $\theta$  площадь можно приближенно записать как

$$A \approx \pi\theta^2.$$

Таким образом, если элементов много и их можно сделать круговыми, то угловой разброс составит

$$\theta \approx 2/\sqrt{n}.$$

Однако в наилучшем случае элементы по форме могут быть близки к шестиугольникам. Как уже упоминалось, площадь шестиугольника, вписанного в окружность радиуса  $r$ , равна  $(3\sqrt{3}/2)r^2$ . Площадь круга, равная  $\pi r^2$ , примерно на 20% больше. Итак, шестиугольная форма дает разброс, который в

$$\sqrt{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}} = 1,0996 \dots$$

раз больше, чем в случае круга той же площади. Отсюда нижняя граница углового разброса для разбиения с  $n$  элементами есть

$$\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}n}} = \frac{2,1993 \dots}{\sqrt{n}}.$$

Например, при  $n=60$  разброс превышает  $16,2^\circ$ . Следует также помнить, что треугольные элементы дают еще больший разброс, а именно в  $\sqrt{2}$  раз больший, чем шестиугольные.

## В. Геодезические купола

Идя далее, мы можем разбить треугольные элементы на четыре меньших треугольника, как это делается в хорошо известных конструкциях геодезического купола [27, 30, 33]. Высокое разрешение достигается здесь за счет ослабления некоторых из приведенных выше критериев (рис. 18). В частности, не все элементы геодезического разбиения имеют одинаковую форму и площадь. Кроме того, элементы, имея форму, подобную (неравносторонним) треугольникам, не компактны. В этом отношении структуры, дуальные геодезическим куполам, лучше, так как их

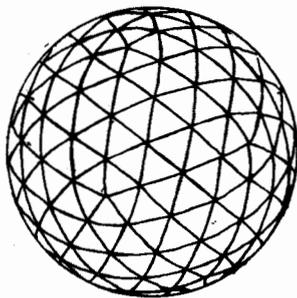


Рис. 18. Образование сот на гауссовой сфере типа икосаэдра с применением принципа геодезического купола с частотой, равной четырем. (Число граней равно  $16 \times 20 = 320$ .)

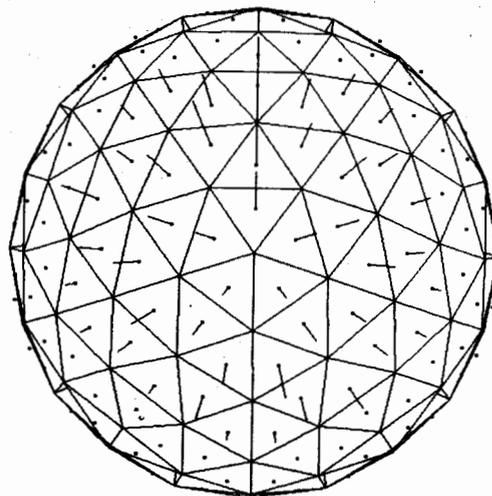


Рис. 19. Гистограмма ориентаций, построенная на геодезическом куполе, образованном из пентакис-додекаэдра. (Число граней равно  $12 \times 5 \times 4 = 240$ .) Это дискретная аппроксимация расширенного гауссова отображения. Длина вектора в центре элемента пропорциональна числу векторов нормали на поверхности исходного объекта, имеющих ориентации, оказывающиеся в области направлений, которую охватывает данный элемент.

грани чаще всего представляют собой (неправильные) шестиугольники, которые дополняют дужица (правильных) пятиугольников. Таким путем можно получить разбиения произвольной тонкости. Хорошим исходным пунктом для геодезического разбиения служит пентакис-додекаэдр, а также объект, построенный выше из усеченного икосаэдра путем деления граней на треугольники.

Каждое ребро треугольных элементов исходного многогранника делится на  $f$  отрезков ( $f$  называется частотой геодезического разбиения). В результате каждая грань разбивается на  $f^2$  (неравносторонних) треугольников. Как мы увидим ниже, для предложенного здесь метода особенно удобны разбиения, при которых частота представляет собой степень двух.

Необходимо располагать эффективным методом расчета, позволяющим определить, какому элементу принадлежит конкретная нормаль к поверхности. В случае разбиений, полученных исходя из правильных многогранников, сначала вычисляется скалярное произведение заданного единичного вектора и вектора, проходящего к центру каждого элемента. (Эти опорные векторы соответствуют вершинам тела, дуального исходному правильному многограннику.) Такая операция дает косинус угла между указанными векторами. Ближайшим опорным вектором является тот, который дает наибольшее скалярное произведение. Далее заданный вектор присваивается элементу, соответствующему этому опорному вектору.

В случае геодезического купола можно вести разбиение иерархически, особенно если частота выражается степенью двух. Геодезический купол создается из некоторого правильного многогранника. Указанным выше способом находится подходящая грань этого многогранника. Затем определяется, в какой из треугольников первого разбиения этой грани попадает заданный единичный вектор нормали. Для этого устанавливается, какое скалярное произведение имеет вектор наибольшую величину. Новых скалярных произведений вычислять не требуется. Далее этот процесс повторяется с четырьмя треугольниками, на которые разбивается указанная грань, и т. д. На практике можно пользоваться методами с просмотром таблиц. Хотя они неточны, зато очень быстрые.

Пусть площадь, занимаемая одним из элементов на гауссовой сфере, равна  $\omega$  (в случае икосаэдра  $\omega = 4\pi/20$ ). Предполагаемое число векторов нормали к поверхности, отображаемых в элемент, для выпуклого

объекта равно

$$\rho \omega |\bar{G}|,$$

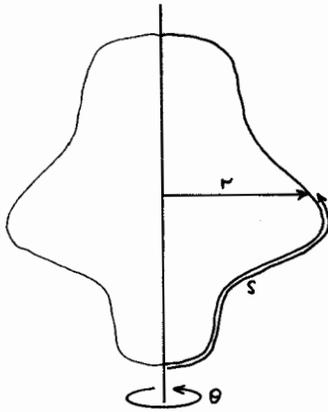
где  $\bar{G}$  — среднее значение  $G(\xi, \eta)$  на элементе.

Ясно, что расширенное гауссово отображение можно вычислять локально. Просто подсчитывается число векторов нормали к поверхности, принадлежащих каждому элементу. С другой стороны, в выражение для гауссовой кривизны входят первая и вторая частные производные функций поверхности. На практике оценки производных ненадежны из-за шума. Поэтому важно иметь возможность вычислять расширенное гауссово отображение, не оценивая эти производные.

Величины в элементах можно рассматривать как гистограмму ориентаций. Недавно автору указали на ее аналогию со схемой, по которой строится гистограмма направлений дендритов на нейронах [34].

Результат можно представить графически, отображая совокупный вес векторов нормали к поверхности векторами нормали каждого элемента. Разделение пентакис-додекаэдра с частотой, равной двум, дает 240 элементов, что вполне достаточно для большинства практических целей (рис. 19). Угловой разброс в этом случае составляет около  $11,5^\circ$ . Другой способ графического представления расширенного гауссова отображения заключается в использовании уровней серого, причем яркость каждого элемента пропорциональна отсчету. Для сохранения формы элементов можно проецировать гауссову сферу не ортогонально, а стереографически. Однако при этом площади элементов будут воспроизводиться в неодинаковом масштабе.

В целях дальнейшего улучшения гистограммы ориентаций нам потребовалось хранить в памяти не просто сумму площадей участков, а сумму векторов, пересчитанную согласно площади соответствующего



**Тело 20.** Тело вращения можно получить, вращая кривую вокруг некоторой оси. Кривую можно задать расстоянием от оси в функции от длины дуги вдоль кривой.

участка. Для этого пришлось втрое увеличить необходимый объем памяти, но зато повысилась точность. Более того, в случае многогранников это представление оказывается точным.

## VI. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Гауссова кривизна поверхности тел вращения определяется довольно легко. Тело вращения образуется в результате вращения (плоской) образующей кривой вокруг некоторой оси (рис. 20). Допустим, что образующая кривая задана расстоянием по перпендикуляру от оси  $r(s)$ , определяемым в виде функции длины дуги  $s$  вдоль кривой. Обозначим через  $\theta$  угол поворота вокруг этой оси. Рассмотрим теперь гауссову сферу, расположенную таким образом, что ее ось направлена по оси тела вращения. Обозначим через  $\xi$  долготу, а через  $\eta$  — широту на гауссовой сфере.

Можно принять, что  $\xi$  соответствует  $\theta$ . Это означает, что нормаль к поверхности в точке объекта, образованного при повороте образующей кривой на угол  $\theta$ , расположена на гауссовой сфере в точке с долготой  $\xi = \theta$ .

### А. Гауссова кривизна тела вращения

Рассмотрим малый участок на гауссовой сфере, расположенный в интервале между  $\xi$  и  $\xi + \delta\xi$  по долготе и между  $\eta$  и  $\eta + \delta\eta$  по широте. Его площадь равна

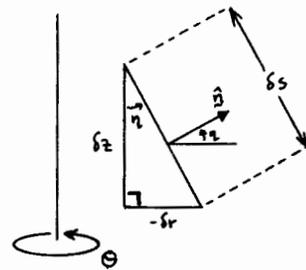
$$\cos \eta \delta\xi \delta\eta.$$

Остается лишь определить площадь соответствующего участка на объекте. Она составляет

$$r \delta\theta \delta s,$$

где  $\delta s$  — приращение расстояния по дуге вдоль образующей кривой, соответствующее приращению  $\delta\eta$  ориентации поверхности. Гауссова кривизна — это предел отношения обеих площадей, когда они стремятся к нулю. Следовательно,

$$K = \lim_{\substack{\delta\eta \rightarrow 0 \\ \delta\xi \rightarrow 0}} \frac{\cos \eta}{r} \frac{\delta\xi}{\delta\theta} \frac{\delta\eta}{\delta s} = \lim_{\delta\eta \rightarrow 0} \frac{\cos \eta}{r} \frac{\delta\eta}{\delta s} = \frac{\cos \eta}{r} \frac{d\eta}{ds},$$



**Рис. 21.** Иллюстрация связи между бесконечно малыми приращениями длины дуги кривой, расстояния от оси вращения и расстояния вдоль этой оси.

поскольку  $\delta\xi = \delta\theta$ . Кривизна образующей кривой  $\kappa_G$  — это просто скорость изменения направления вдоль дуги в зависимости от ее длины [22—24]. Таким образом,

$$\frac{d\eta}{ds} = \kappa_G,$$

откуда

$$K = \frac{\kappa_G \cos \eta}{r}.$$

Легко убедиться (рис. 21), что  $\sin \eta = -r_s$ , где  $r_s$  — частная производная  $r$  по  $s$ . Дифференцируя по  $s$ , получаем

$$\cos \eta \frac{d\eta}{ds} = \frac{d}{ds}(-r_s) = -r_{ss},$$

что дает простую формулу

$$K = -\frac{r_{ss}}{r}.$$

Например, в случае сферы радиуса  $R$  имеем  $r = R \cos(s/R)$  при условии  $-(\pi/2)R < s < +(\pi/2)R$ . Таким образом,  $r_{ss} = -(r/R^2)$  и  $K = 1/R^2$ .

Для некоторых целей полезнее выразить радиус  $r$  в виде функции расстояния вдоль оси, а не длины дуги вдоль кривой. Обозначим расстояние вдоль оси через  $z$ . Легко удостовериться (рис. 21), что  $\tan \eta = -r_z$ , поэтому, дифференцируя по  $s$ , получаем

$$\sec^2 \eta \frac{d\eta}{ds} = \frac{d}{ds}(-r_z) = -r_{zz} \frac{dz}{ds},$$

где, как видно из чертежа,  $\cos \eta = z_s$  и, следовательно,

$$\kappa_G \cos \eta = \frac{d\eta}{ds} \cos \eta = -r_{zz} \cos^4 \eta,$$

Окончательно получаем

$$K = \frac{r_{zz}}{-r(1+r_z^2)^2},$$

так как

$$\sec^2 \eta = 1 + r_z^2.$$

**В. Другой вывод формулы гауссовой кривизны тела вращения (\*)**

В начале нам потребуется рассмотреть теорему Менье [22—24]. Обратимся к нормальному сечению поверхности в определенной точке. Оно получается при пересечении поверхности с одной из плоскостей, содержащей локальную нормаль (рис. 22). Пусть кривизна кривой, по которой поверхность пересекается этой плоскостью, равна  $\kappa_N$ . Представим себе теперь, что плоскость отклоняется от нормали на угол  $\eta$  (в качестве оси поворота служит локальная касательная). Эта новая плоскость пересечет поверхность по кривой с большей кривизной. Можно показать, что кривизна новой кривой равна

$$\kappa_N / \cos \eta.$$

В этом легко удостовериться в случае сферы, поскольку плоскость, содержащая центр, пересекает сферу по большому кругу, тогда как наклонная плоскость пересекает ее по малому кругу с радиусом, пропорциональным косинусу угла наклона.

Вернемся теперь к поверхности вращения. Нетрудно показать, что одна из главных кривизн в точке на поверхности будет соответствовать сечению поверхности плоскостью, содержащей ось вращения. Полученная в результате кривая и будет образующей кривой тела вращения. Таким образом, одна из двух главных кривизн равна кривизне  $\kappa_G$  образующей кривой в соответствующей точке.

Рассмотрим далее плоскость, перпендикулярную оси вращения и проходящую через ту же точку поверхности (рис. 23). Она пересекает поверхность по окружности. Кривизна в этой плоскости равна  $(1/r)$ , где  $r$  — радиус тела вращения в этой точке. Однако эта горизонтальная плоскость не является нормальным сечением. Пусть нормаль образует с этой плоскостью угол  $\eta$ . (Угол  $\eta$  образует также локальная касательная плоскость с осью вращения.) Построим теперь плоскость, содержащую локальную нормаль и пересекающую горизонтальную плоскость по линии, перпендикулярной оси. Эта плоскость будет наклонена к только что исследованной нами плоскости под углом  $\eta$ . Она дает также искомое второе главное нормальное сечение. Из теоремы Менье видно, что кривизна кривой в этом нормальном сечении  $\kappa_N =$

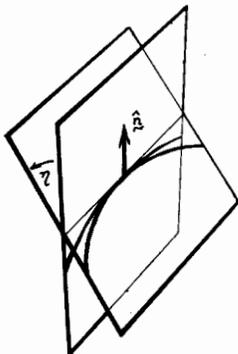


Рис. 22. Кривизна кривой, полученной сечением поверхности наклонной плоскостью, больше, чем при сечении плоскостью, содержащей вектор нормали к поверхности. Теорема Менье гласит, что отношение этих двух кривизн равно косинусу угла между данными двумя плоскостями.

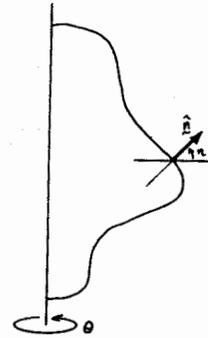


Рис. 23. При сечении тела вращения плоскостью, перпендикулярной оси вращения, получается окружность. Кривизна в этой плоскости равна просто обратной величине расстояния от поверхности до оси. Кривизну, соответствующую нормальному сечению, можно найти с помощью теоремы Менье.

$= (1/r) \cos \eta$ . Наконец, путем умножения находим гауссову кривизну, которая равна

$$K = \frac{\kappa_G \cos \eta}{r}.$$

Например, в случае сферы радиуса  $R$  получаем  $r = R \cos \eta$  и  $\kappa_G = 1/R$ , таким образом,  $K = 1/R^2$ , как и следовало ожидать.

Чтобы облегчить использование этого результата, построим систему координат, в которой ось  $z$  проходит по оси вращения. Образующая кривая выражается как  $r(z)$ . Обозначим первую и вторую производные  $r$  по  $z$  соответственно через  $r_z$  и  $r_{zz}$ . Легко убедиться (рис. 21), что  $\text{tg } \eta = r_z$  и поэтому

$$\cos \eta = \frac{1}{\sqrt{1 + r_z^2}}.$$

Кроме того,

$$\kappa_G = - \frac{r_{zz}}{(1 + r_z^2)^{3/2}},$$

и поэтому в окончательном виде получаем

$$K = - \frac{r_{zz}}{r(1 + r_z^2)^2}.$$

Чтобы воспользоваться этим результатом для вывода расширенного гауссова отображения, необходимо отождествить точки на поверхности с точками на гауссовой сфере. Введем полярный угол  $\theta$ , такой что

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Тогда вектор единичной нормали к поверхности будет определяться как

$$\frac{(\cos \theta, \sin \theta, -r_z)^T}{\sqrt{1 + r_z^2}}.$$

Приравняв его вектору единичной нормали на гауссовой сфере

$$(\cos \xi \cos \eta, \sin \xi \cos \eta, \sin \eta)^T,$$

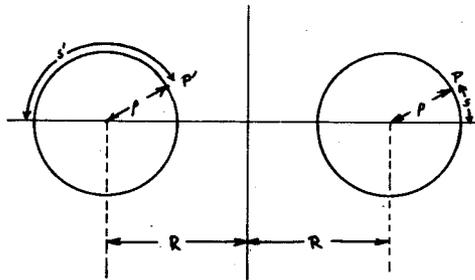


Рис. 24. Тор, полученный вращением окружности вокруг некоторой оси. Результирующий объект невыпуклый, тем не менее можно вычислить его расширенное гауссово отображение.

получаем

$$\xi = \theta \quad \text{и} \quad \text{tg } \eta = -r_z.$$

### С. Расширенное гауссово отображение тора

В качестве иллюстрации определим теперь расширенное гауссово отображение тора. Пусть большая ось тора равна  $R$ , а малая —  $\rho$  (рис. 24). Точку на поверхности можно задать величинами  $\theta$  и  $s$ , где  $\theta$  — угол, отсчитываемый вокруг оси тора, а  $s$  — длина дуги, измеряемая относительно плоскости симметрии. Тогда

$$r = R + \rho \cos(s/\rho),$$

$$r_{ss} = -(1/\rho) \cos(s/\rho),$$

следовательно,

$$K = -\frac{r_{ss}}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\cos(s/\rho)}{R + \rho \cos(s/\rho)}.$$

Две точки  $P$  и  $P'$  (рис. 24), отстоящие по углу  $\theta$  на  $\pi$ , имеют на торе одинаковую поверхностную ориентацию. Вектор нормали к поверхности в одной из этих точек направлен в сторону, противоположную от оси вращения, тогда как в другой точке этот вектор направлен в сторону этой оси. Следовательно, две точки на объекте

$$(\theta, s) = (\xi, \rho\eta) \quad \text{и} \quad (\theta, s) = (\xi + \pi, \rho(\pi - \eta))$$

соответствуют одной точке  $(\xi, \eta)$  на гауссовой сфере. Кривизны в этих точках имеют противоположные знаки:

$$K_+ = +\frac{1}{\rho} \frac{\cos \eta}{R + \rho \cos \eta} \quad \text{и} \quad K_- = -\frac{1}{\rho} \frac{\cos \eta}{R - \rho \cos \eta}.$$

Поскольку тор — невыпуклый объект, вклад в определенную точку расширенного гауссова отображения вносит не одна точка на его поверхности. Суммируя абсолютные значения обратных величин кривизны, получаем

$$G(\eta, \xi) = \frac{1}{K_+} - \frac{1}{K_-} = 2R\rho \sec \eta.$$

Если просуммировать обратные величины алгебраически, то получим

$$\frac{1}{K_+} + \frac{1}{K_-} = 2\rho^2,$$

что вдвое превышает результат для сферы радиуса  $\rho$ . Те же результаты дает использование формулы

$$K = \frac{\kappa_G \cos \eta}{r};$$

так как  $\kappa_G = -1/\rho$  и  $r = R \pm \rho \cos \eta$ , следовательно,

$$K = \frac{\pm \cos \eta}{\rho(R \pm \rho \cos \eta)}.$$

Расширенное гауссово отображение тора имеет особенности в полюсах. Они соответствуют двум кольцам, на которых покоился бы тор на плоскости. Все точки на одном из этих колец имеют одинаковую поверхностную ориентацию.

Можно считать, что гауссова сфера покрыта двумя листами римановой поверхности, один из которых соответствует внутренней половинке тора, расположенной ближе к его оси симметрии, а другой — внешней половине. Оба листа соединяются между собой в полюсах, причем точки разветвления соответствуют упомянутым выше двум кольцам. Здесь гауссова кривизна меняет знак.

Укажем также, что все торы с одинаковой площадью поверхности ( $4\pi^2\rho R$ ) имеют одно и то же расширенное гауссово отображение.

### D. Единственный выпуклый объект с $G(\xi, \eta) = 2\sec \eta$

В то время как все торы с площадью поверхности  $4\pi^2$  имеют одно и то же расширенное гауссово отображение

$$G(\xi, \eta) = 2\sec \eta,$$

существует всего один выпуклый объект с таким же расширенным гауссовым отображением. Это — тело вращения, так как  $G(\xi, \eta)$  не зависит от  $\xi$ . Итак, с одной стороны,

$$K = 1/2 \cos \eta,$$

а с другой стороны,

$$K = \frac{\kappa_G \cos \eta}{r},$$

и, следовательно,

$$\kappa_G = r/2.$$

Уравнение указывает, что кривизна образующих кривых имеет линейную зависимость от расстояния до оси вращения. Это обманчиво простое уравнение, будучи выраженным через  $z$ , представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение второго по-

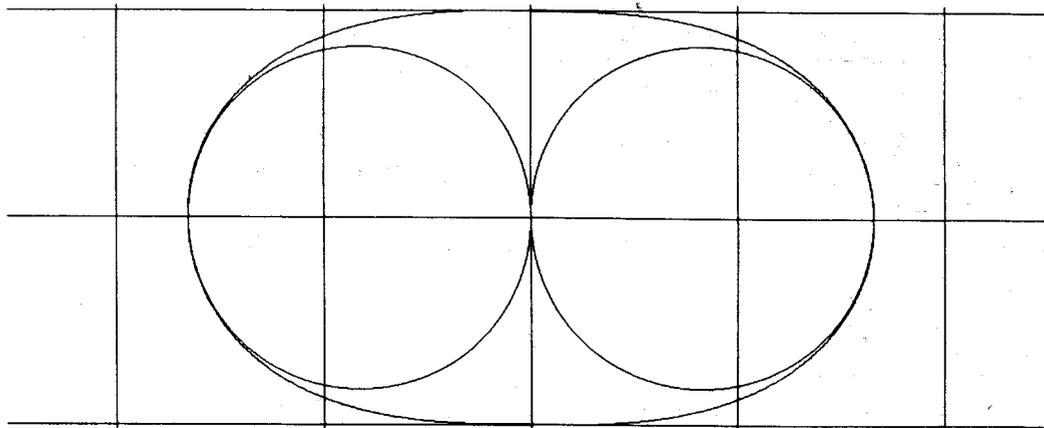


Рис. 25. Единственный выпуклый объект с таким же расширенным гауссовым отображением, как и для тора, имеет интересную форму. Это — тело вращения, образующая кривая которого представляет собой кривую наименьшей энергии. Такую форму примет однородный стержень, если он должен проходить через две точки с данной ориентацией в пространстве.

рядка относительно  $r$ , поскольку

$$\kappa_G = -\frac{r_{zz}}{(1+r_z^2)^{3/2}},$$

откуда

$$r_{zz} = -\frac{r}{2}(1+r_z^2)^{3/2}.$$

Теперь

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{1+r_z^2}} = -\frac{r_z r_{zz}}{(1+r_z^2)^{3/2}}$$

и

$$\frac{d}{dz} \frac{r^2}{4} = \frac{r r_z}{2},$$

так что

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{1+r_z^2}} = \frac{d}{dz} \frac{r^2}{4},$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{1+r_z^2}} = \frac{r^2 + c^2}{4},$$

где  $c^2$  — постоянная интегрирования. Теперь мы свели задачу к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка по  $r$ , выраженному через  $z$ . Раз объект должен быть выпуклым и гладким в полюсах, можно ожидать, что  $r_z \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ . Таким образом,  $c=0$ . Заметим далее, что член слева равен  $\cos \eta$ , поэтому можно записать

$$\cos \eta = \frac{r^2}{4},$$

или, привлекая предыдущее выражение для  $\kappa_G$ , получаем

$$\kappa_G = -\sqrt{\cos \eta}.$$

Это — неявное уравнение кривой наименьшей энергии [35]! Кривая наименьшей энергии — это кривая, минимизирующая интеграл от квадрата кривизны  $\kappa_G$ . При решении данного уравнения относительно  $z$ , выраженного через  $r$ , получаем

$$z = \sqrt{2} [2E(\arccos(r/2), 1/\sqrt{2}) - F(\arccos(r/2), 1/\sqrt{2})],$$

где  $E$  и  $F$  — неполные эллиптические интегралы. Если обозначить через  $s$  длину дуги кривой, можно записать полученное решение в форме Уэвелла

$$s = \sqrt{2} F(\arccos \sqrt{\cos \eta}, 1/\sqrt{2}),$$

или в форме Чезаро

$$s = \sqrt{2} F(\arccos(-\kappa_G), 1/\sqrt{2}),$$

Длина кривой от полюса до экватора есть

$$\sqrt{2} K(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2} K(\sin(\pi/4)) = \frac{\Gamma(1/4)^2}{2\sqrt{2}\pi}.$$

где  $K$  — полный эллиптический интеграл первого рода, а  $\Gamma$  — гамма-функция [24]. Высота от экватора до полюса равна

$$W = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\Gamma(1/4)^2},$$

а максимальный радиус

$$H = 2.$$

Минимальный радиус кривизны равен единице, поэтому окружность, касательная в самой далекой точке, будет также касательной в начале координат [35]. Эта окружность при вращении относительно вертикальной оси даст тор с таким же расширенным гауссовым отображением (рис. 25). Полная площадь поверхности обоих объектов равна  $4\pi^2$ .

### VII. ГАУССОВА КРИВИЗНА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Если объект не является телом вращения, нахождение гауссовой кривизны требует несколько больших усилий. Пусть  $x=x(u, v)$ ,  $y=y(u, v)$  и  $z=z(u, v)$

представляют собой параметрические уравнения для точек на заданной поверхности. Обозначим через  $r = (x, y, z)^T$  вектор к некоторой точке на поверхности. Тогда

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} \quad \text{и} \quad r_v = \frac{\partial r}{\partial v}$$

представляют собой две касательные к поверхности, как уже отмечалось выше. Векторное произведение этих двух векторов

$$n = r_u \times r_v$$

перпендикулярно локальной касательной плоскости (рис. 14). Квадрат длины этого нормального вектора равен

$$n^2 = n \cdot n = (r_u \cdot r_u)(r_v \cdot r_v) - (r_u \cdot r_v)^2,$$

так как  $(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$ . Используя этот результат, можно вычислить единичный вектор  $\hat{n} = n/n$ .

**А. Гауссова кривизна, связанная с отклонением нормалей** (\*)

Гауссова кривизна представляет собой предел отношения площади участка на гауссовой сфере к площади соответствующего участка на рассматриваемой поверхности, когда площадь стягивается к нулю. Рассмотрим бесконечно малый треугольник, образованный тремя точками на поверхности, соответствующими  $(u, v)$ ,  $(u + \delta u, v)$  и  $(u, v + \delta v)$ . Длины двух сторон этого треугольника равны

$$|r_u| \delta u \quad \text{и} \quad |r_v| \delta v,$$

а синус угла между ними

$$\frac{|r_u \times r_v|}{|r_u| |r_v|},$$

и, следовательно, направленная вовне нормаль, равная по величине площади треугольника, будет определяться уравнением

$$\frac{1}{2} (r_u \times r_v) \delta u \delta v = \frac{1}{2} n \delta u \delta v.$$

Чтобы определить площадь соответствующего треугольного участка на гауссовой сфере, нужно найти единичные векторы нормали к поверхности в этих трех точках. Единичные векторы нормали поверхности будут выражаться следующим образом:

$$\hat{n}, \quad \hat{n} + \hat{n}_u \delta u, \quad \text{и} \quad \hat{n} + \hat{n}_v \delta v,$$

если пренебречь членами высшего порядка по  $\delta u$  и  $\delta v$ . Здесь  $\hat{n}_u$  и  $\hat{n}_v$  — частные производные  $\hat{n}$  по  $u$  и  $v$ . Отметим, что  $\hat{n}_u$  и  $\hat{n}_v$  перпендикулярны  $\hat{n}$ . Рассуждая так же, как при определении площади исходного участка на заданной поверхности, приходим к выводу, что площадь участка на гауссовой сфере равна величине вектора

$$\frac{1}{2} (\hat{n}_u \times \hat{n}_v) \delta u \delta v.$$

Чтобы вычислять эту площадь, необходимо найти  $\hat{n}_u$

и  $\hat{n}_v$ . Но

$$\hat{n}_u = \frac{\partial \hat{n}}{\partial u} = \frac{n n_u - n n_u}{n^2}.$$

Из соотношения  $n^2 = n \cdot n$  получаем

$$n n_u = n \cdot n_u,$$

следовательно,

$$\hat{n}_u = \frac{(n \cdot n) n_u - (n \cdot n_u) n}{n^3} = \frac{(n \times n_u) \times n}{n^3}$$

и

$$\hat{n}_v = \frac{(n \cdot n) n_v - (n \cdot n_v) n}{n^3} = \frac{(n \times n_v) \times n}{n^3},$$

поскольку  $(a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a$ . Отсюда

$$\hat{n}_u \times \hat{n}_v = \frac{n^2}{n^6} [(n \cdot n)(n_u \times n_v) + (n \cdot n_u)(n_v \times n) + (n \cdot n_v)(n \times n_u)]$$

или

$$\hat{n}_u \times \hat{n}_v = \frac{1}{n^4} [n n_u n_v] n,$$

так как

$$[abc]p = (a \cdot p)(b \times c) + (b \cdot p)(c \times a) + (c \cdot p)(a \times b),$$

где  $[abc] = (a \times b) \cdot c$ .

Отсюда видно, что участок на гауссовой сфере имеет такую же ориентацию, как участок на поверхности, что и следовало ожидать. Направленный вовне вектор нормали, равный по величине площади, определяется выражением

$$\frac{1}{2} \frac{1}{n^4} [n n_u n_v] n \delta u \delta v.$$

Отсюда отношение этих двух площадей, т. е. гауссова кривизна, будет просто равно

$$K = \frac{[n n_u n_v]}{n^4}.$$

Но

$$n = r_u \times r_v,$$

и, следовательно,

$$n_u = r_{uu} \times r_v + r_u \times r_{uv}$$

$$n_v = r_{uv} \times r_v + r_u \times r_{vv}.$$

Воспользовавшись далее уравнением

$$(a \times b) \times (c \times d) = [abd]c - [abc]d$$

или

$$(a \times b) \times (c \times d) = [acd]b - [bcd]a,$$

получаем

$$n_u \times n_v = -[r_{uu}r_vr_{vv}]r_v + [r_{uu}r_vr_{vv}]r_u - [r_{uu}r_vr_u]r_{vv} + [r_u r_{uv}r_v]r_{uv} + [r_u r_{uv}r_{vv}]r_u,$$

следовательно,

$$[nn_u n_v] = n \cdot (n_u \times n_v) = [r_u r_v r_{uu}][r_u r_v r_{vv}] - [r_u r_v r_{uv}]^2,$$

и, наконец,

$$K = \frac{[r_u r_v r_{uu}][r_u r_v r_{vv}] - [r_u r_v r_{uv}]^2}{|r_u \times r_v|^4}.$$

Этим результатом можно воспользоваться для более строгого вывода выражения, определяющего кривизну тела вращения.

**В. Основные квадратичные формы поверхности (\*)**

Пусть, как и ранее,

$$\hat{n} = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

есть единичный вектор нормали к поверхности. Первая основная квадратичная форма поверхности дает квадрат элемента расстояния [24]:

$$ds^2 = |dr|^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2.$$

Вторая основная квадратичная форма поверхности дает нормальную кривизну, которая находится из уравнения [24]

$$-dr \cdot d\hat{n} = L(u, v) du^2 + 2M(u, v) du dv + N(u, v) dv^2.$$

Коэффициенты можно выразить через производные по r следующим образом:

$$\begin{aligned} E &= r_u \cdot r_u \\ F &= r_u \cdot r_v \\ G &= r_v \cdot r_v \\ L &= r_u \cdot \hat{n}_u \\ M &= r_u \cdot \hat{n}_v = r_v \cdot \hat{n}_u \\ N &= r_v \cdot \hat{n}_v \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} L &= \frac{[r_u r_v r_{uu}]}{\sqrt{EG - F^2}} \\ M &= \frac{[r_u r_v r_{uv}]}{\sqrt{EG - F^2}} \\ N &= \frac{[r_u r_v r_{vv}]}{\sqrt{EG - F^2}} \end{aligned}$$

Следовательно, [24]

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Наконец, если поверхность задана в виде  $z(x, y)$ , то указанное выше соотношение сводится к известной

формуле

$$K = \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2}.$$

**С. Применение общей формулы к эллипсоиду (\*\*)**

В случае эллипсоида, как уже указывалось,

$$\begin{aligned} r &= (a \cos \theta \cos \phi, b \sin \theta \cos \phi, c \sin \theta)^T \\ r_\theta &= (-a \sin \theta \cos \phi, b \cos \theta \cos \phi, 0)^T \\ r_\phi &= (-a \cos \theta \sin \phi, -b \sin \theta \sin \phi, c \cos \theta)^T \\ r_{\theta\theta} &= (-a \cos \theta \cos \phi, -b \sin \theta \cos \phi, 0)^T \\ r_{\theta\phi} &= (a \sin \theta \sin \phi, -b \cos \theta \sin \phi, 0)^T \\ r_{\phi\phi} &= (-a \cos \theta \cos \phi, -b \sin \theta \cos \phi, -c \sin \theta)^T. \end{aligned}$$

Вектор нормали к поверхности можно найти, вычисляя векторные произведения

$$n = r_\theta \times r_\phi = (bc \cos \theta \cos \phi, ca \sin \theta \cos \phi, ab \sin \theta)^T \cos \theta$$

Отсюда коэффициенты первой основной квадратичной формы

$$\begin{aligned} E &= r_\theta \cdot r_\theta = (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) \cos^2 \theta \\ F &= r_\theta \cdot r_\phi = (a^2 + b^2) \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi \\ G &= r_\phi \cdot r_\phi = (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= [(bc \cos \theta \cos \phi)^2 + \\ &+ (ca \sin \theta \cos \phi)^2 + (ab \sin \theta)^2] \cos^2 \phi. \end{aligned}$$

Для вычисления коэффициентов второй основной квадратичной формы требуется знать величины

$$\begin{aligned} [r_\theta r_\phi r_{\theta\theta}] &= n \cdot r_{\theta\theta} = -abc \cos^3 \phi \\ [r_\theta r_\phi r_{\theta\phi}] &= n \cdot r_{\theta\phi} = 0 \\ [r_\theta r_\phi r_{\phi\phi}] &= n \cdot r_{\phi\phi} = -abcc \cos \phi, \end{aligned}$$

которые дают

$$[r_\theta r_\phi r_{\theta\theta}][r_\theta r_\phi r_{\phi\phi}] - [r_\theta r_\phi r_{\theta\phi}]^2 = (abcc \cos^2 \phi)^2.$$

Отсюда, наконец, получаем

$$\begin{aligned} LN - M^2 &= \frac{(abcc \cos^2 \phi)^2}{EG - F^2} \\ K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \\ &= \left[ \frac{abc}{(bc \cos \theta \cos \phi)^2 + (ca \sin \theta \cos \phi)^2 + (ab \sin \theta)^2} \right]^2. \end{aligned}$$

Этот результат использовался ранее при рассмотрении расширенного гауссова отображения эллипсоида.

## VIII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Дано определение расширенного гауссова отображения, рассмотрены его свойства и приведены примеры. Указаны методы определения расширенного гауссова отображения многогранников, тел вращения и объектов с гладкой криволинейной поверхностью общего вида. Описана гистограмма ориентаций — дискретное приближение расширенного гауссова отображения и изложен ряд способов разбиения сферы на участки. Методы машинного зрения, позволяющие получить информацию об ориентации поверхности, необходимую для построения гистограммы ориентаций, рассмотрены в работах [1, 3—8]. Можно проводить сопоставления расширенных гауссовых отображений, основанных на моделях объектов, с расширенными гауссовыми отображениями, найденными по экспериментальным данным. В недавно опубликованной статье [17] обсуждаются вопросы применения расширенных гауссовых отображений для распознавания объектов и, что более важно, для определения ориентации объекта в пространстве.

## ОТ АВТОРА

Автор хотел бы выразить благодарность Э. Гримсону и Т. Лозано-Перезу за ряд полезных предложений, сделанных после прочтения чернового варианта данной работы.

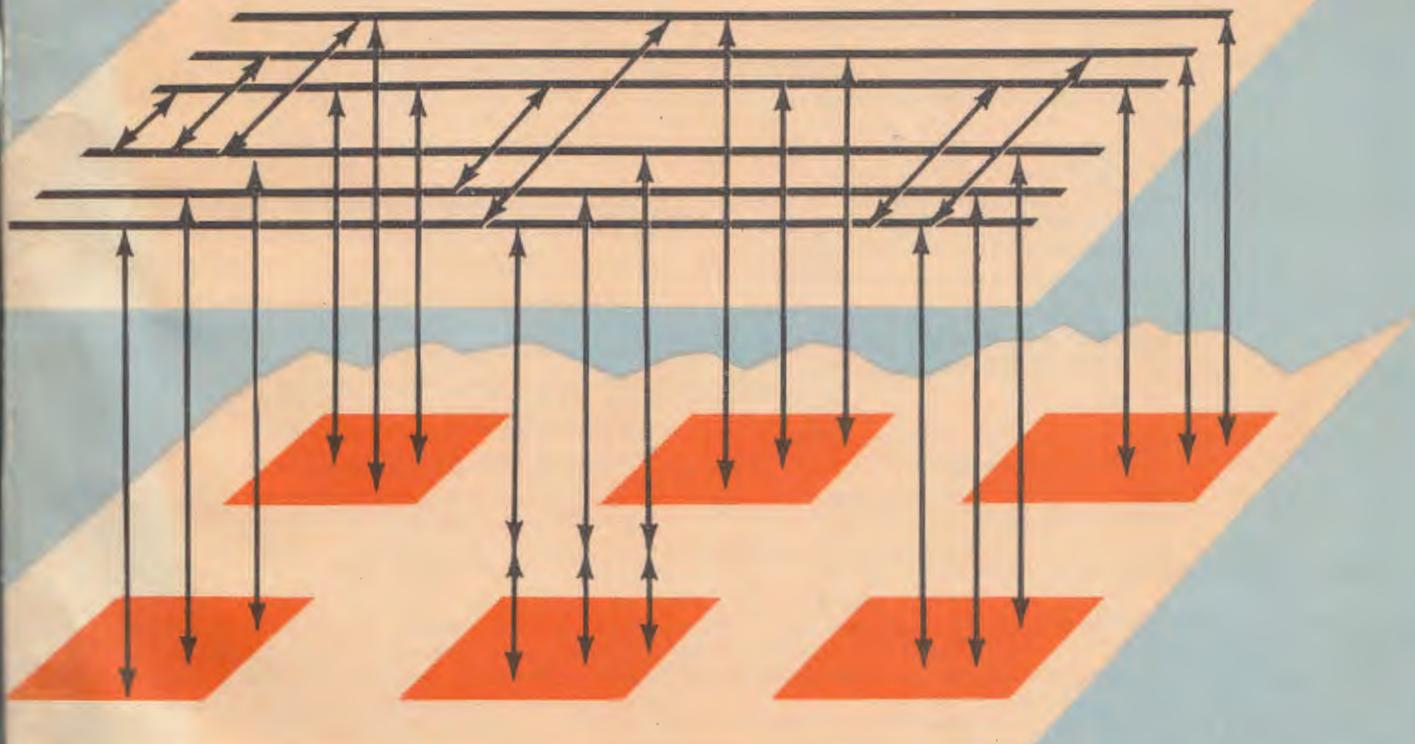
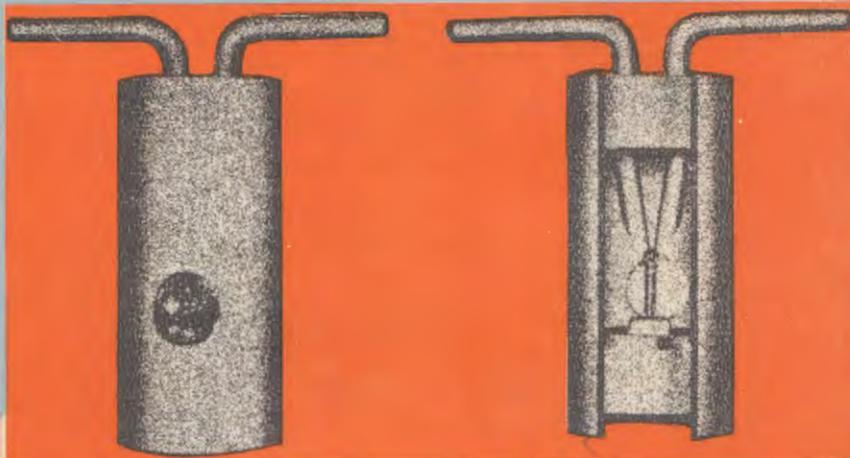
## ЛИТЕРАТУРА

- [1] W. E. L. Grimson, *From Images to Surfaces*. Cambridge, MA: M. I. T. Press, 1981.
- [2] B. K. P. Horn, "Sequins and quills—Representations for surface topography," M.I.T. A.I. Lab. Memo 536, May 1979.
- [3] R. J. Woodham, "Photometric stereo: A reflectance map technique for determining surface orientation from a single view," in *Image Understanding Systems and Industrial Applications (Proc. S.P.I.E. 22nd Annu. Tech. Symp.)*, vol. 155, pp. 136–143, Aug. 1978.
- [4] B. K. P. Horn, R. J. Woodham, and W. M. Silver, "Determining shape and reflectance using multiple images," M.I.T. A.I. Lab. Memo 490, Aug. 1978.
- [5] R. J. Woodham, "Photometric method for determining surface orientation from multiple images," *Opt. Eng.*, vol. 19, no. 1, pp. 139–144, Jan./Feb. 1980.
- [6] W. M. Silver, "Determining shape and reflectance using multiple images," S. M. thesis, Dep. Elec. Eng. Comput. Sci., M.I.T., June 1980.
- [7] K. Ikeuchi, "Determining surface orientation of specular surfaces using the photometric stereo method," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. PAMI-3, no. 6, pp. 661–669, Nov. 1981.
- [8] E. N. Coleman and R. Jain, "Obtaining 3-dimensional shape of textured and specular surfaces using four-source photometry," *Comput. Graph. Image Process.*, vol. 18, no. 4, pp. 309–328, 1982.
- [9] D. A. Smith, "Using enhanced spherical images," M.I.T. A.I. Lab. Memo No. 530, May 1979.
- [10] R. Bajcsy, "Three-dimensional scene analysis," in *Proc. 5th Int. Pattern Recognition Conf.* (Miami, FL, Dec. 1980), pp. 1064–1074.
- [11] K. Ikeuchi, "Recognition of objects using the extended Gaussian image," in *Proc. IJCAI-81* (Vancouver, B. C., Canada, Aug. 1981), pp. 595–600.
- [12] C. Dane and R. Bajcsy, "Three-dimensional segmentation using the Gaussian image and spatial information," in *Proc. IEEE Comput. Soc. Conf. on Pattern Recognition and Image Processing* (Dallas, TX, Aug. 1981), pp. 54–56.
- [13] D. H. Ballard and D. Sabbah, "detecting object orientation from surface normals," in *Proc. Int. Pattern Recognition Conf.* (München, FRG, Dec. 1981), pp. 63–67.
- [14] P. Brou, "Finding objects in depth maps," Ph.D. dissertation, M.I.T. Dep. Elec. Eng. Comput. Sci., Sept. 1983.
- [15] K. Ikeuchi, "Determining the attitude of an object from a needle map using the extended Gaussian image," M.I.T. A.I. Lab. Memo No. 714, Apr. 1983.
- [16] K. Ikeuchi, B. K. P. Horn, S. Nagata, T. Callahan and O. Feingold, "Picking an object from a pile of objects," M.I.T. A.I. Lab. Memo No. 726, May 1983.
- [17] Хори Б. К. П., Икути К. Механическое манипулирование произвольно ориентированными объектами. В *мире науки*. 1984, № 10, с. 76–86.
- [18] H. Minkowski, "Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder," *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physikalische Klasse, Göttingen*, pp. 198–219, 1897. (также: H. Minkowski, *Gesammelte Abhandlungen*. Leipzig, Germany: 1911).
- [19] Погорелов А. В. *Дифференциальная геометрия*. М.: Наука, 1974.
- [20] Люстерник Л. А. *Выпуклые тела*. М.—Л.: Гостехиздат, 1941.
- [21] J. J. Little, "An iterative method for reconstructing convex polyhedra from extended Gaussian images," in *Proc. Nat. Conf. on Artificial Intelligence* (Washington, D C, Aug. 1983), pp. 247–254.
- [22] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. *Наглядная геометрия*. М.: Наука, 1981.
- [23] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*. New York: Academic Press, 1966.
- [24] Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. М.: Наука, 1970.
- [25] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1976.
- [26] Александров А. Д. Существование и единственность выпуклой поверхности с данной интегральной кривизной. *Доклады АН СССР*, 1942, т. 35, № 8.
- [27] M. J. Wenninger, *Spherical Models*. Cambridge, England: Cambridge Univ. Press, 1979.
- [28] L. Fejes Toth, *Regular Figures*. New York: Pergamon, 1964.
- [29] M. J. Wenninger, *Polyhedron Models*. Cambridge, England: Cambridge Univ. Press, 1971.
- [30] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*. New York: Dover, 1973.
- [31] H. Kenner, *Geodesic Math—And How To Use It*. Los Angeles, CA: Univ. of California Press, 1976.
- [32] P. Pearce and S. Pearce, *Polyhedra Primer*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1978.
- [33] A. Pugh, *Polyhedra—A Visual Approach*. Los Angeles, CA: Univ. of California Press, 1976.
- [34] C. M. Brown, "Representing the orientation of dendritic fields with geodesic tessellations," Internal Rep. TR-13, Computer Sci. Dep., Univ. of Rochester, Rochester, NY, 1977.
- [35] B. K. P. Horn, "The curve of least energy," *ACM Trans. Math. Software*, vol. 9, no. 4, pp. 441–460, Dec. 1983.

Бертольд К. П. Хорн в 1970 г. получил степень доктора философии в Массачусетском технологическом институте, Кеймбридж, шт. Массачусетс. Основные научные интересы в течение последних шестнадцати лет — робототехника и машинное зрение. В его понимании машинное зрение — это процесс инверсии, требующий тщательного изучения процедуры формирования изображения, поскольку при этом часть информации может теряться и необходимо вводить дополнительные граничные условия. Д-р Хорн впервые использовал такого рода условия при формулировании задач оптимизации, которые привели к алгоритмам с высокой степенью параллелизма, допускающим реализацию как в электронных, так и в биологических системах. Иллюстрацией этого служат работы, посвященные восстановлению формы объектов по теням, расчетам яркости и оптическим потокам. Он принимал непосредственное участие в работе по дистанционному зондированию и робототехническим устройствам, проводимой в лаборатории искусственного интеллекта Массачусетского технологического института. В качестве примеров можно назвать выполненную более десяти лет назад работу по автоматической ориентации кристаллов микроскопом для присоединения выводов, вычисление карты альбеда, применяемой при классификации местностей, и в самое последнее время систему для отбора деталей из беспорядочной груды с использованием визуальной информации.

## Статьи

РАСШИРЕННЫЕ ГАУССОВЫ ОТОБРАЖЕНИЯ  
ВОССТАНАВЛИВАЕМЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ДЛЯ РСБИС И СБИС-ПЛАСТИН  
БЕНКЕР И ШАЙВ О ТРАНЗИСТОРЕ  
ТРАНСОКЕАНСКАЯ СВЯЗЬ



Малый  
тематический  
выпуск

АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ:  
СИСТЕМНЫЕ ВОПРОСЫ И АЛГОРИТМЫ