

ESTABILIDADE E ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE EM REDE COM INCERTEZAS E ATRASOS VARIANTES NO TEMPO

LUIS FELIPE DA CRUZ FIGUEREDO*, PEDRO HENRIQUE DE RODRIGUES QUEMEL E ASSIS SANTANA*,
EDUARDO DA SILVA ALVES*, JOÃO YOSHIYUKI ISHIHARA*, GEOVANY ARAÚJO BORGES*, ADOLFO
BAUCHSPIESS*

**Grupo de Robótica Automação e Visão (GRAV)*
Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília

Emails: lfc.figueredo@yahoo.com.br, phrqas@ieee.org, ealves@ieee.org,
ishihara@ene.unb.br, gaborges@ene.unb.br, adolfobs@unb.br

Abstract— This paper proposes a new robust stabilization criterion for networked control systems liable to model uncertainties, time-varying delays and packet losses. The analysis concerns the establishment of a state feedback gain matrix that brings the system to stability and a maximum data transmission delay bound. The new proposed criterion is based on the solution of a set of linear matrix inequalities. A numerical example shows that the results presented here are less conservative than previous ones.

Keywords— Networked control systems, stabilization, robust stability, LMI, Lyapunov function.

Resumo— Este artigo apresenta um novo critério para estabilização robusta de sistemas de controle em rede sujeitos a incertezas de modelo, atrasos variantes no tempo e perdas de pacotes. A análise proposta neste artigo preocupa-se, principalmente, em estabelecer uma matriz de ganho de realimentação que conduz o sistema à estabilidade. Além disso, os resultados obtidos estipulam um limite máximo para o atraso de transmissão para o qual o sistema ainda é estável. O critério desenvolvido neste trabalho é baseado na solução de um conjunto de LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*. Um exemplo numérico mostra que os resultados apresentados neste artigo são menos conservadores do que aqueles obtidos em trabalhos anteriores.

Palavras-chave— Sistemas de controle em rede, estabilização, estabilidade robusta, LMI, função de Lyapunov.

1 INTRODUÇÃO

Sistemas de controle em rede, do inglês *Networked Control Systems* (NCSs), remetem-se a uma classe de sistemas de controle cujos elementos (planta, controladores, atuadores e sensores) estão interligados por meio de uma rede de comunicação digital e as informações são trocadas na forma de pacotes de dados (Yang, 2006; Zhang et al., 2001; Branicky et al., 2000; Nilsson, 1998; Hespanha et al., 2007; Yu, Yu e Wang, 2004). Sistemas de controle em rede possuem muitas vantagens quando comparados com arquiteturas tradicionais de controle, incluindo menores custos de instalação, redução de cabeamento, maiores flexibilidade e confiabilidade (Yang, 2006; Lian, 2001). Contudo, a inserção de uma rede de comunicação compartilhada na malha de controle introduz diversos tipos de atrasos durante a troca de dados entre sensores, atuadores e controladores (Yang, 2006). O atraso total entre a transmissão e eventual decodificação no receptor pode ser altamente variável, pois tanto o atraso de acesso ao meio na camada MAC quanto o atraso de transmissão de pacotes dependem das condições da rede, tais como congestionamento e qualidade do canal (Hespanha et al., 2007). Atrasos de comunicação entre os diversos elementos de um sistema de controle podem degradar o desempenho e até mesmo levar o sistema à instabilidade (Branicky et al., 2000; Zhang et al., 2001; Hespanha et al., 2007). Além disso, existe a possibilidade de perda de pacotes no canal de comunicação. Novas pesquisas na área de estabilidade e controle foram estimuladas por conta destes desafios (Yang, 2006).

Uma das primeiras contribuições nesta área é encontrada em Halevi e Ray (1988), cujo trabalho apresenta um modelo discreto no tempo e analisa estabilidade para sistemas com atrasos constantes e periódicos. O trabalho apresentado em (Seiler e Sengupta, 2001) propõe um sistema de controle em rede com apenas um canal de realimentação afetado pela rede, no qual um controlador de tempo contínuo é disposto conjuntamente com o elemento de atuação e apenas o sensor e o controlador estão conectados através de uma rede de comunicação compartilhada. Em Nilsson (1998) e em suas referências, os autores investigam sistematicamente problemas de modelamento e análise de sistemas de controle em rede sob a hipótese de que o atraso de transmissão entre o sensor e atuador é menor do que um período de amostragem.

Os trabalhos de Yu, Wang, Chu e Hao (2004) e Richard (2003) modelam um sistema de controle em rede em tempo contínuo por equações diferenciais atrasadas. Uma grande vantagem desta caracterização é que as equações são válidas mesmo quando os atrasos excedem um período de amostragem (Hespanha et al., 2007). O problema de análise de estabilidade de sistemas de controle em rede em tempo contínuo é estudado em (Peng e Tian, 2008; Fridman e Shaked, 2002; Naghshtabrizi et al., 2008; Park et al., 2002; He, Wang, Xie e Lin, 2007; Naghshtabrizi et al., 2009; Yue et al., 2004; Yue et al., 2005; Zhu e Yang, 2008; Figueredo et al., 2009). Todos estes trabalhos preocupam-se com a investigação de estabilidade dependente do atraso pela escolha de uma função candidata de Lyapunov apropriada e solução de um conjunto de LMIs.

Todavia, entre estes trabalhos destacam-se (Peng e Tian, 2008; Zhu e Yang, 2008; Figueredo et al., 2009; Naghshtabrizi et al., 2008; Fridman e Shaked, 2002). Peng e Tian (2008) propõe uma abordagem para estabilidade robusta de sistemas com incertezas de modelo e atrasos variantes no tempo. Entretanto, em (Peng e Tian, 2008), impõem-se condições com respeito à derivada do atraso por meio da hipótese de que o atraso varia lentamente no tempo. Zhu e Yang (2008) propõe um novo critério de estabilidade que é menos conservador do que aquele obtido em (Peng e Tian, 2008) e em suas referências, e não impõe restrições sobre a derivada do atraso. Contudo, o problema de incertezas de modelo não é abordado. Figueredo et al. (2009) faz uma análise de estabilidade semelhante a de (Zhu e Yang, 2008), porém considerando incertezas de modelo. Em (Naghshtabrizi et al., 2008; Fridman e Shaked, 2002), o problema de estabilização para NCSs é abordado. Todavia, o critério de Fridman e Shaked (2002), por ser mais antigo, não considera as novas ferramentas utilizadas na análise de estabilidade para NCSs e, por isso, é bastante conservador. Naghshtabrizi et al. (2008) adota uma abordagem híbrida para sistemas amostrados (do inglês, *sampled-data systems*), a qual expande-se para NCS. Entretanto, apesar de apresentar resultados menos conservadores, seu critério de estabilização considera somente NCSs com perdas de pacotes, não levando em conta atrasos de comunicação, o que limita sua aplicabilidade.

Neste contexto, este trabalho propõe um novo critério de estabilização robusta para NCSs com incertezas de modelo e atrasos variantes no tempo baseado na solução de um conjunto de LMIs. Nossa análise de estabilidade envolve menos variáveis do que em (Peng e Tian, 2008) e os resultados são menos conservadores do que em (Peng e Tian, 2008; Zhu e Yang, 2008; Figueredo et al., 2009). Nosso projeto de controle é mais abrangente do que em (Naghshtabrizi et al., 2008) e, mesmo assim, os resultados obtidos são menos conservadores.

Este artigo está organizado da seguinte maneira. A Seção 2 apresenta a descrição do sistema e aspectos preliminares, levando em consideração atrasos de transmissão, perdas de pacotes no canal de comunicação e incertezas nos parâmetros da planta. Na Seção 3, um novo critério para estabilidade robusta de sistemas de controle em rede é proposto, o qual é obtido por meio da solução de um conjunto de LMIs. Na Seção 4 é obtido um critério para estabilização robusta de NCSs. Exemplos numéricos são mostrados na Seção 5, seguidos pelas conclusões, que são apresentadas na Seção 6.

2 DESCRIÇÃO DO SISTEMA

Um sistema de controle em rede susceptível a perdas e desordenamento de pacotes pode ser descrito conforme a Figura 1. Este sistema é composto pela planta G_p , pelo controlador G_c e uma rede de comunicação

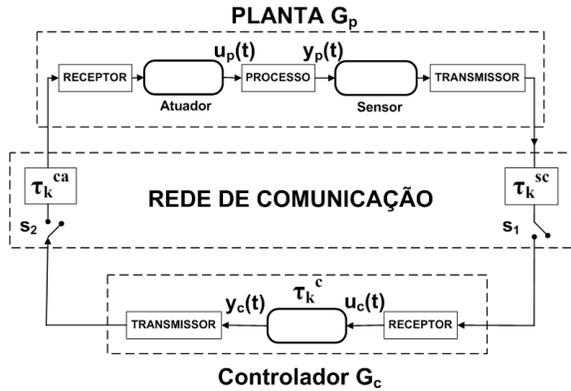


Figura 1: Um sistema de controle em rede sujeito a perdas de pacotes e atrasos de transmissão.

de dados. A planta G_p inclui um sensor e um atuador. Todos os elementos (sensor, atuador e controlador) possuem elementos de comunicação (transmissor/receptor). O transmissor envia pacotes de dados pela rede de comunicação e o receptor é responsável por adquiri-los. Neste trabalho, considera-se apenas transmissão de pacotes individuais, ou seja, todos os dados, enviados ou recebidos, são agregados em um único pacote de rede e transmitidos ao mesmo tempo.

Em todo o artigo, assumimos que o sensor é orientado a relógio com um período de amostragem h . O controlador e o atuador são orientados a eventos. No caso de desordenamento de pacotes, o atuador utiliza sempre a última entrada de controle disponível.

No modelamento do sistema, consideram-se os seguintes atrasos:

- τ_k^{sc} : atraso de transmissão entre o sensor e o controlador para o k -ésimo pacote;
- τ_k^c : atraso de computação no controlador para o k -ésimo pacote;
- τ_k^{ca} : atraso de transmissão entre o controlador e o atuador para o k -ésimo pacote;
- τ_k : atraso de transmissão total entre o sensor e o atuador para k -ésimo pacote.

As chaves S_1 e S_2 na Figura 1 modelam a possibilidade de perda de pacote. Quando a chave está na posição fechada, os pacotes estão aptos a alcançar seus destinos. Caso contrário, eles são perdidos.

2.1 Modelo da planta

O modelo da planta apresentado aqui é o seguinte:

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \quad (1)$$

$$y_p(t) = x_p(t) \quad (2)$$

em que $x_p(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$ é o vetor de estado da planta, $u_p(t) \in \mathbb{R}^m$ e $y_p(t) \in \mathbb{R}^r$ são os vetores de entrada e saída da planta, respectivamente. As matrizes A_p e B_p são consideradas não exatamente conhecidas, mas pertencentes a conjuntos limitados: $A_p \in \mathcal{A}_p \subset \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ e $B_p \in \mathcal{B}_p \subset \mathbb{R}^{n_p \times m}$.

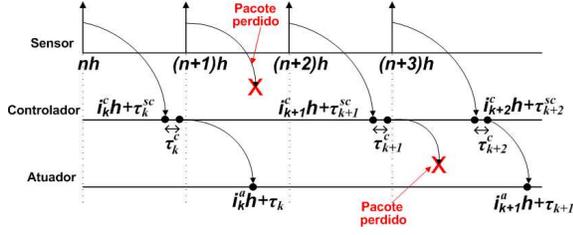


Figura 2: Diagrama de tempo para os atrasos de transmissão.

2.2 Modelo do sistema

A cada instante de tempo nh , em que h é o período de transmissão e $n \in \mathbb{N}^*$, o sensor amostra os dados da planta e os envia pela rede para o controlador G_c . O controlador recebe esses pacotes de dados a cada instante de tempo $i_k^c h + \tau_k^{sc}$, em que o termo $i_k^c h$, $k \in \mathbb{N}^*$, denota o instante de amostragem do k -ésimo pacote recebido pelo controlador. Subseqüente ao período de computação, o controlador envia o sinal de controle para o atuador a cada instante $i_k^c h + \tau_k^{sc} + \tau_k^c$. Seja o termo $i_k^a h + \tau_k$, $k \in \mathbb{N}^*$, o instante de tempo no qual o atuador recebe o k -ésimo sinal de controle. O diagrama de tempo mostrado na Figura 2 ilustra o fluxo de dados no modelo em questão.

Observação 1 Não haverá perdas ou desordenamento de pacotes na transmissão de dados entre o sensor e o atuador se $\{i_1^a, i_2^a, \dots, i_n^a, \dots\} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$. Se a p -ésima amostra for perdida, então $\exists q, q \in \mathbb{N}^*$, tal que $i_q^a = p$. Desordenamento de dados ocorre quando um pacote chega ao seu destino posteriormente aos seus sucessores, ou seja, $\exists p, q \in \mathbb{N}^*$, $p > q$, tal que $i_q^a > i_p^a$. Neste caso, o pacote mais antigo, i_p^a , é perdido e seus dados são descartados.

Considerando apenas o atraso de comunicação entre o sensor e o controlador, os sinais $u_c(t)$ e $y_c(t)$, respectivamente a entrada e a saída do controlador, podem ser descritos da seguinte forma

$$u_c(t) = x_p(i_k^c h) \quad (3)$$

$$y_c(t) = Kx_p(i_k^c h), \forall k \in \mathbb{N}^* \quad (4)$$

em que x_p é o estado da planta, $t \in [i_k^c h + \tau_k^{sc}, i_{k+1}^c h + \tau_{k+1}^{sc})$, e $0 \leq \tau_k^{sc} \leq \tau_k^{sc, max}$.

Com objetivo de estabilizar o sistema, uma lei de controle proporcional com uma matriz de realimentação de ganho constante é utilizada. Portanto, o sinal de entrada da planta, $u_p(t)$, definido em (2) pode ser escrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} u_p(t) &= y_c(i_k^a h + \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca}) \\ &= Kx_p(i_k^a h), \end{aligned} \quad (5)$$

em que y_c é a saída do controlador, $t \in [i_k^a h + \tau_k, i_{k+1}^a h + \tau_{k+1})$, e $0 \leq \tau_k \leq \tau_k^{max}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Conseqüentemente, $\tau_k = \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca}$ e $\tau_k^{max} = \tau_k^{sc, max} + \tau_k^{c, max} + \tau_k^{ca, max}$.

Similarmente a (Jiang et al., 2008; Yue et al., 2005), assumiremos a existência das constantes η e τ , $0 \leq \tau \leq \eta$, tal que

$$\begin{aligned} (i_{k+1}^a - i_k^a)h + \tau_{k+1} &\leq \eta, \\ \tau &\leq \tau_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

O termo η denota um limite máximo para o atraso induzido na rede, englobando tanto o atraso na transmissão de dados quanto perdas de pacotes. O termo τ denota um limite mínimo para o atraso, envolvendo também tanto atrasos na transmissão de dados quanto perdas de pacotes.

Utilizando (2)-(5), o modelo do sistema pode ser descrito como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d(t)), \quad (6)$$

$$x(t) = \phi(t), t \in [t_1 - \eta, t_1], \quad (7)$$

$$\tau \leq d(t) \leq \eta, \quad (8)$$

$$d(t) = t - i_k^a h, \quad t \in [i_k^a h + \tau_k, i_{k+1}^a h + \tau_{k+1}), \quad (9)$$

em que t_1 denota o instante no qual o atuador recebe o primeiro sinal de controle e $A_d = B_p K$.

A função $d(t)$ representa o atraso variante no tempo entre o sensor e o atuador. Analogamente a (Zhu e Yang, 2008), assumiremos que $\dot{d}(t) = 1$.

A equação (6), considerando incertezas e atrasos variantes no tempo, pode ser reescrita conforme adiante

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t - d(t)) \quad (10)$$

As incertezas ΔA e ΔA_d são matrizes variantes no tempo de dimensões apropriadas, as quais são definidas como

$$\Delta A = M_A F_A N_A, \quad (11)$$

$$\Delta A_d = M_{Ad} F_{Ad} N_{Ad}, \quad (12)$$

em que M_A , N_A , M_{Ad} e N_{Ad} são matrizes conhecidas, reais e constantes com dimensões apropriadas. F_A e F_{Ad} representam matrizes não conhecidas variantes no tempo as quais estão limitadas por $F_A^T F_A \leq I$ e $F_{Ad}^T F_{Ad} \leq I$.

Se o controlador K é conhecido, o resultado apresentado na seção a seguir pode ser usado na análise de estabilidade do sistema descrito em (10)-(12).

3 ESTABILIDADE ROBUSTA

Esta subseção apresenta um novo critério de estabilidade robusta para sistemas de controle em rede com incertezas de modelo. O teorema obtido, escrito na forma de um conjunto de LMIs, é baseado na seguinte função de Lyapunov candidata

$$V(t) = \sum_{i=1}^3 V_i(t), \quad (13)$$

em que

$$V_1(t) = x^T(t)Px(t), \quad (14)$$

$$V_2(t) = \int_{t-\tau}^t x(s)^T Q_1 x(s) ds + \int_{t-\alpha d(t)}^t x(s)^T (Q_3 + Q_2) x(s) ds + \int_{t-\eta}^{t-\alpha d(t)} x(s)^T (Q_2 + Q_4) x(s) ds, \quad (15)$$

$$V_3(t) = \int_{-\eta}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}(s)^T Z_1 \dot{x}(s) ds d\beta + \int_{-\eta}^{-\tau} \int_{t+\beta}^t \dot{x}(s)^T Z_2 \dot{x}(s) ds d\beta, \quad (16)$$

e as matrizes P and Z_j , $j \in \{1, 2\}$, são positivas definitas e Q_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, são positivas semidefinidas.

Observação 2 Analogamente a (Zhu e Yang, 2008; Figueredo et al., 2009), o caráter derivativo da função de atraso variante no tempo, $d(t)$, pode ser levado em consideração por meio do elemento α , descrito em (15). Se esta constante não for usada, alguns elementos na derivada de (13) cancelam-se, fazendo com que o critério de estabilidade obtido seja mais conservador. Pode-se observar que a introdução da constante α não afeta a monotonicidade decrescente de $V_2(t)$ no tempo.

Os seguintes resultados serão úteis para se obter condições suficientes para estabilidade de um sistema de controle em rede.

Lema 1 (Yan et al., 2008; Wang et al., 1992) Para quaisquer matrizes reais A , D , F , E e P de dimensões apropriadas tais que $P > 0$ e $F^T F \leq I$, as seguintes afirmações são válidas

(i) $DFE + E^T F^T D^T \leq \varepsilon^{-1} DD^T + \varepsilon EE^T, \forall \varepsilon > 0$

(ii) Se $P - \varepsilon DD^T > 0$, então

$$(A + DFE)^T P^{-1} (A + DFE) \leq A^T (P - \varepsilon DD^T)^{-1} A + \varepsilon^{-1} E^T E.$$

O lema seguinte é uma simples extensão da regra da integral de Leibniz.

Lema 2 Para quaisquer constantes τ e η e matriz M de dimensão apropriada, vale a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\int_{-\eta}^{-\tau} \int_{t+\beta}^t [\dot{x}^T(s) M \dot{x}(s)] ds d\beta \right] \\ &= (\eta - \tau) \dot{x}^T(t) M \dot{x}(t) - \int_{t-\eta}^{t-\tau} \dot{x}^T(s) M \dot{x}(s) ds. \end{aligned}$$

Lema 3 (Zhu e Yang, 2008; Gu et al., 2003; He, Wang, Lin e Wu, 2007) Dados os escalares r_1 , r_2 , a

matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tal que $(r_2 - r_1) > 0$ e $M = M^T > 0$ e a função vetorial $x : [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}^m$ temos:

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{r_2} x^T(\beta) M x(\beta) d\beta \\ & \geq \frac{1}{(r_2 - r_1)} \left(\int_{r_1}^{r_2} x(\beta) d\beta \right)^T M \left(\int_{r_1}^{r_2} x(\beta) d\beta \right). \end{aligned}$$

Lema 4 Para matrizes de dimensões apropriadas, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\begin{bmatrix} M & \alpha & R \\ \alpha^T & Z & \beta \\ R^T & \beta^T & Q \end{bmatrix} > 0$,

(ii) $\begin{bmatrix} M - RQ^{-1}R^T & \alpha - RQ^{-1}\beta^T \\ \alpha^T - \beta Q^{-1}R^T & Z - \beta Q^{-1}\beta^T \end{bmatrix} > 0, Q > 0$

Usando (13) como função de Lyapunov candidata para análise de estabilidade do sistema descrito por (10)-(12), um critério de estabilidade assintótica dependente do atraso para NCSs sujeitos a incertezas de modelo é obtido conforme a seguir.

Teorema 1 Dados os escalares $0 \leq \tau < \eta$, $0 < \alpha < 1$, e $\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} M_A^T U M_A & M_A^T U M_{Ad} \\ M_{Ad}^T U M_A & M_{Ad}^T U M_{Ad} \end{bmatrix} - \varepsilon^{-1} I < 0,$$

o sistema descrito por (10)-(12) é assintoticamente estável se existem matrizes $P = P^T > 0$, $Q_1 = Q_1^T \geq 0$, $Q_2 = Q_2^T \geq 0$, $(Q_2 + Q_3) \geq 0$, $(Q_2 + Q_4) \geq 0$, $Z_j = Z_j^T > 0$, $j \in \{1, 2\}$ tal que

$$\begin{bmatrix} \Theta_M & \Theta_\alpha & \Theta_R & \Theta_P \\ \Theta_\alpha^T & \Theta_Z & 0 & 0 \\ \Theta_R^T & 0 & \Theta_Q & 0 \\ \Theta_P^T & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

é válido, em que

$$\begin{aligned} U &= \eta Z_1 + (\eta - \tau) Z_2, \\ \Theta_R &= \begin{bmatrix} A^T U M_A & A^T U M_{Ad} \\ A_d^T U M_A & A_d^T U M_{Ad} \end{bmatrix}, \\ \Theta_Q &= \left[-\varepsilon^{-1} I + \begin{bmatrix} M_A^T \\ M_{Ad}^T \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} M_A & M_{Ad} \end{bmatrix} \right], \\ \Theta_\alpha &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha \eta} Z_1 \\ \frac{1}{\eta - \tau} Z_2 & \frac{1}{\eta - \tau} (Z_1 + Z_2) & \frac{1}{(1 - \alpha) \eta} Z_1 \end{bmatrix}, \\ \Theta_P &= \begin{bmatrix} P M_A & P M_{Ad} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Theta_Z &= \begin{bmatrix} \Theta_{Z_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{Z_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{Z_{33}} \end{bmatrix}, \\ \Theta_{Z_{11}} &= -Q_1 - \frac{1}{\eta - \tau} Z_2 \\ \Theta_{Z_{22}} &= -Q_2 - Q_4 - \frac{1}{\eta - \tau} (Z_1 + Z_2) \\ \Theta_{Z_{33}} &= (1 - \alpha) (Q_4 - Q_3) - \frac{1}{\alpha \eta} Z_1 - \frac{1}{(1 - \alpha) \eta} Z_1. \end{aligned}$$

Prova: Tomando a derivada da função de Lyapunov candidata (13) tem-se

$$\dot{V}_1(t) = \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & x^T(t)(Q_1 + Q_2 + Q_3)x(t) - x^T(t - \tau)Q_1x(t - \tau) \\ & + (1 - \alpha)x^T(t - \alpha d(t))(-Q_3 + Q_4)x(t - \alpha d(t)) \\ & - x^T(t - \eta)(Q_2 + Q_4)x(t - \eta) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) = & \frac{d}{dt} \left[\int_{-\eta}^0 \int_{t+\beta}^t [\dot{x}(s)^T Z_1 \dot{x}(s)] ds d\beta \right] \\ & + \frac{d}{dt} \left[\int_{-\eta}^{-\tau} \int_{t+\beta}^t [\dot{x}(s)^T Z_2 \dot{x}(s)] ds d\beta \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

De (10)-(12), (18) pode ser escrita como

$$\dot{V}_1(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \end{bmatrix}^T H \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \end{bmatrix}, \quad (21)$$

em que

$$H = \begin{bmatrix} (A + \Delta A)^T P + P(A + \Delta A) & P(A_d + \Delta A_d) \\ (A_d + \Delta A_d)^T P & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o Lema 1 (i) em (21), pode-se obter

$$\dot{V}_1(t) \leq \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \end{bmatrix}^T L \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

em que

$$\begin{aligned} L &= \begin{bmatrix} L_{11} & PA_d \\ A_d^T P & N_{Ad}^T N_{Ad} \end{bmatrix}, \\ L_{11} &= A^T P + PA + N_A^T N_A + P(M_A M_A^T + M_{Ad} M_{Ad}^T)P. \end{aligned}$$

Do Lema 2, (20) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) = & \dot{x}(t)^T (\eta Z_1 + (\eta - \tau)Z_2) \dot{x}(t) \\ & - \int_{t-\alpha d(t)}^t [\dot{x}(s)^T Z_1 \dot{x}(s)] ds - \int_{t-d(t)}^{t-\alpha d(t)} [\dot{x}(s)^T Z_1 \dot{x}(s)] ds \\ & - \int_{t-\eta}^{t-d(t)} [\dot{x}(s)^T (Z_1 + Z_2) \dot{x}(s)] ds - \int_{t-d(t)}^{t-\tau} [\dot{x}(s)^T Z_2 \dot{x}(s)] ds. \end{aligned} \quad (23)$$

Aplicando o Lema 3 à (23) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) \leq & \dot{x}(t)^T U \dot{x}(t) - \frac{1}{\alpha \eta} [x(t) - x(t - \alpha d(t))]^T Z_1 [x(t) - x(t - \alpha d(t))] \\ & - \frac{1}{(1-\alpha)\eta} [x(t - \alpha d(t)) - x(t - d(t))]^T Z_1 [x(t - \alpha d(t)) - x(t - d(t))] \\ & - \frac{1}{\eta - \tau} [x(t - \tau) - x(t - d(t))]^T Z_2 [x(t - \tau) - x(t - d(t))] \\ & - \frac{1}{\eta - \tau} [x(t - d(t)) - x(t - \eta)]^T (Z_1 + Z_2) [x(t - d(t)) - x(t - \eta)]. \end{aligned} \quad (24)$$

O termo $\dot{x}^T(t)U\dot{x}(t)$ em (24) pode ser escrito como:

$$\dot{x}^T(t)U\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \end{bmatrix}^T T \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \end{bmatrix},$$

em que,

$$\begin{aligned} T = & \begin{bmatrix} (A + M_A F_A(t) N_A)^T \\ (A_d + M_{Ad} F_{Ad}(t) N_{Ad})^T \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} (A + M_A F_A(t) N_A)^T \\ (A_d + M_{Ad} F_{Ad}(t) N_{Ad})^T \end{bmatrix}^T \\ = & \left(\begin{bmatrix} A^T \\ A_d^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_A^T & 0 \\ 0 & N_{Ad}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_A^T & 0 \\ 0 & F_{Ad}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A^T \\ M_{Ad}^T \end{bmatrix} \right) U \\ & \left(\begin{bmatrix} A & A_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_A & M_{Ad} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_A & 0 \\ 0 & F_{Ad} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_A & 0 \\ 0 & N_{Ad} \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Aplicando o Lema 1 (ii) à (25) tem-se

$$\begin{aligned} T \leq & \begin{bmatrix} A^T \\ A_d^T \end{bmatrix} \left(U^{-1} - \varepsilon \begin{bmatrix} M_A & M_{Ad} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A^T \\ M_{Ad}^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} A & A_d \end{bmatrix} \\ & + \varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} N_A^T & 0 \\ 0 & N_{Ad}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_A & 0 \\ 0 & N_{Ad} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (26)$$

Então, usando a famosa identidade matricial de *Woodbury* em (26) tem-se

$$\begin{aligned} T \leq T_w = & \begin{bmatrix} A^T U A + \varepsilon^{-1} N_A^T N_A & A^T U A_d \\ A_d^T U A & A_d^T U A_d + \varepsilon^{-1} N_{Ad}^T N_{Ad} \end{bmatrix}^{-1} \\ & \begin{bmatrix} A^T \\ A_d^T \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} M_A^T \\ M_{Ad}^T \end{bmatrix} \left(\varepsilon^{-1} I - \begin{bmatrix} M_A^T \\ M_{Ad}^T \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} M_A^T \\ M_{Ad}^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} M_A^T \\ M_{Ad}^T \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} A^T \\ A_d^T \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\dot{V}_3 \leq \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \end{bmatrix}^T T_w \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Sendo

$$\begin{aligned} \delta^T = & \\ & [x^T(t)x^T(t-d(t))x^T(t-\tau)x^T(t-\eta)x^T(t-\alpha d(t))], \end{aligned}$$

a combinação de (19), (22) e (27) chega-se à condição de estabilidade

$$\dot{V}(t) \leq \begin{bmatrix} \Theta_M - \Theta_R \Theta_O^{-1} \Theta_R^T + \Theta_P \Theta_P^T & \Theta_\alpha \\ \Theta_\alpha^T & \Theta_Z \end{bmatrix} < 0, \quad (28)$$

$$\Theta_M = \begin{bmatrix} \Theta_{M_{11}} & A^T U A_d + P A_d \\ A_d^T U A + A_d^T P & \Theta_{M_{22}} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Theta_{M_{11}} = & A^T U A + \varepsilon^{-1} N_A^T N_A - \frac{1}{\alpha \eta} Z_1 + Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ & + A^T P + P A + N_A^T N_A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{M_{22}} = & A_d^T U A_d + \varepsilon^{-1} N_{Ad}^T N_{Ad} - \frac{1}{(1-\alpha)\eta} Z_1 - \frac{1}{\eta - \tau} Z_2 \\ & - \frac{1}{\eta - \tau} (Z_1 + Z_2) + N_{Ad}^T N_{Ad}. \end{aligned}$$

Do Lema 4, considerando $\alpha \leftarrow \Theta_\alpha$ e $\beta \leftarrow 0$, (28) pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \Theta_M + \Theta_P \Theta_P^T & \Theta_\alpha & \Theta_R \\ \Theta_\alpha^T & \Theta_Z & 0 \\ \Theta_R^T & 0 & \Theta_Q \end{bmatrix} < 0. \quad (29)$$

Por fim, aplicando o Lema de Schur à (29) para eliminar os termos quadráticos tem-se (17), como queríamos demonstrar. \square

4 ESTABILIZAÇÃO ROBUSTA

O critério de estabilidade proposto no Teorema 1 pode ser usado para projetar um ganho de realimentação K que estabiliza o sistema de malha fechada descrito por (6)-(12). Com este propósito, A_d é substituído por BK em (17). Portanto, visto que existem termos cruzados entre K e P e K e U , as desigualdades resultantes formam um conjunto de BMIs, do inglês *Bilinear Matrix Inequalities*. Neste contexto, o seguinte teorema, escrito sob a forma de um conjunto de LMIs, fornece condições para encontrar um ganho de realimentação que estabilize o sistema.

Teorema 2 *Dados os escalares $0 \leq \tau < \eta$, $0 < \alpha < 1$, $\varepsilon > 0$ e $\rho > 0$, existe um ganho de realimentação de estado K que estabiliza assintoticamente o sistema descrito em (6)-(10) para o conjunto de incertezas descrito por (11)-(12) se existem matrizes Y , $P_n = P_n^T > 0$, $Q_{ni} = Q_{ni}^T \geq 0$, $Z_{nj} = Z_{nj}^T > 0$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j \in \{1, 2\}$ tal que*

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{12}^T & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \rho U_n \leq P_n; \quad (30)$$

em que

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \begin{bmatrix} J_{11} & BY & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha\eta}Z_{n1} & P_n A^T \\ * & J_{22} & \frac{1}{\eta-\tau}Z_{n2} & \frac{1}{\eta-\tau}(Z_{n1}+Z_{n2}) & \frac{1}{(1-\alpha)\eta}Z_{n1} & Y^T B^T \\ * & * & J_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & J_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & J_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & J_{66} \end{bmatrix}, \\ \Omega_{12} &= \begin{bmatrix} P_n N_A^T & 0 & \sqrt{\varepsilon^{-1}}P_n N_A^T & 0 \\ * & P_n N_{Ad}^T & 0 & \sqrt{\varepsilon^{-1}}P_n N_{Ad}^T \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$J_{11} = P_n A^T + A P_n - \frac{1}{\alpha\eta}Z_{n1} + Q_{n1} + Q_{n2} + Q_{n3} + M_A M_A^T + M_{Ad} M_{Ad}^T,$$

$$J_{22} = -\frac{1}{(1-\alpha)\eta}Z_{n1} - \frac{1}{\eta-\tau}Z_{n2} - \frac{1}{\eta-\tau}(Z_{n1} + Z_{n2}),$$

$$J_{33} = -Q_{n1} - \frac{1}{\eta-\tau}Z_{n2},$$

$$J_{44} = -Q_{n2} - Q_{n4} - \frac{1}{\eta-\tau}(Z_{n1} + Z_{n2}),$$

$$J_{55} = (1-\alpha)(Q_{n4} - Q_{n3}) - \frac{1}{\alpha\eta}Z_{n1} - \frac{1}{(1-\alpha)\eta}Z_{n1},$$

$$J_{66} = -\rho P_n + \varepsilon M_A M_A^T + \varepsilon M_{Ad} M_{Ad}^T,$$

$$U_n = \eta Z_{n1} + (\eta - \tau) Z_{n2}.$$

Se (30) é válido, o controlador que estabiliza o sistema descrito em (6)-(9) é dado por $K = Y P_n^{-1}$.

Prova: Considerando a mesma função de Lyapunov candidata (13) e sua derivada, obtemos o critério de estabilidade (17). Todavia, deixando de aplicar a identidade matricial de Woodbury em (26), tem-se que a combinação de (19), (22) e (26) resulta na seguinte condição de estabilidade

$$\dot{V}(t) \leq \begin{bmatrix} \Theta_M - \Theta_R \Theta^{-1} \Theta_R^T + \Theta_P \Theta_P^T & \Theta_\alpha \\ \Theta_\alpha^T & \Theta_Z \end{bmatrix} < 0, \quad (31)$$

em que

$$\Theta_{Q_2} = -U^{-1} + \varepsilon M_A M_A^T + \varepsilon M_{Ad} M_{Ad}^T$$

Do Lema 4, com identidades $\alpha \leftarrow \Theta_\alpha$ e $\beta \leftarrow 0$, (31) pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \Theta_M + \Theta_P \Theta_P^T & \Theta_\alpha & \Theta_R \\ \Theta_\alpha^T & \Theta_Z & 0 \\ \Theta_R^T & 0 & \Theta_{Q_2} \end{bmatrix} < 0. \quad (32)$$

Definindo $P_n := P^{-1}$ e multiplicando (32) por $\text{diag}(P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, I)$, do lado direito e esquerdo, e definindo

$$\begin{aligned} Q_{n1} &:= P_n Q_1 P_n, & Q_{n2} &:= P_n Q_2 P_n, & Q_{n3} &:= P_n Q_3 P_n, \\ Z_{n1} &:= P_n Z_1 P_n, & Z_{n2} &:= P_n Z_2 P_n, \\ U_n &:= P_n U P_n \Rightarrow & U^{-1} &:= P_n U_n^{-1} P_n, \end{aligned}$$

tem-se,

$$\begin{bmatrix} H_{11} & A_d P_n & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha\eta}Z_{n1} & P_n A^T \\ * & H_{22} & \frac{1}{\eta-\tau}Z_{n2} & \frac{1}{\eta-\tau}(Z_{n1}+Z_{n2}) & \frac{1}{(1-\alpha)\eta}Z_{n1} & P_n A_d^T \\ * & * & J_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & J_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & J_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & H_{66} \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

em que,

$$\begin{aligned} H_{11} &= P_n A^T + A P_n - \frac{1}{\alpha\eta}Z_{n1} + Q_{n1} + Q_{n2} + Q_{n3} + M_A M_A^T \\ &\quad + M_{Ad} M_{Ad}^T + P_n N_A^T N_A P_n + \varepsilon^{-1} P_n N_A^T N_A P_n, \\ H_{22} &= -\frac{1}{(1-\alpha)\eta}Z_{n1} - \frac{1}{\eta-\tau}Z_{n2} - \frac{1}{\eta-\tau}(Z_{n1} + Z_{n2}) \\ &\quad + P_n N_{Ad}^T N_{Ad} P_n + \varepsilon^{-1} P_n N_{Ad}^T N_{Ad} P_n, \\ H_{66} &= -P_n U_n^{-1} P_n + \varepsilon M_A M_A^T + \varepsilon M_{Ad} M_{Ad}^T \end{aligned}$$

e J_{33} , J_{44} e J_{55} são definidos (30).

Em (33), o termo $A_d P_n$ torna-se BY pela substituição de A_d por $BK = B Y P_n^{-1}$. Então, definindo um escalar $\rho > 0$ tal que

$$\rho U_n \leq P_n \quad (34)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \rho P_n &\leq P_n U_n^{-1} P_n \\ H_{66} &\leq -\rho P_n + \varepsilon M_A M_A^T + \varepsilon M_{Ad} M_{Ad}^T = J_{66}. \end{aligned}$$

Por fim, aplicando o Lema de Schur em (33) para eliminar os termos quadráticos tem-se (30), o que completa a prova. \square

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção, apresentaremos três exemplos para validar o critério proposto. Primeiramente, investigamos a aplicabilidade do nosso critério para NCSs na ausência de incertezas. No segundo exemplo, demonstramos que o Teorema 1 apresenta resultados menos conservadores que os apresentados em outros trabalhos. Por fim, no último exemplo, verifica-se a aplicabilidade do projeto de controle através do Teorema 2.

Tabela 1: Limite máximo de atraso para o exemplo 2

| Métodos | η |
|---|----------|
| Fridman e Shaked (2002) | 0.1820 s |
| Wu et al. (2004), Jing et al. (2004) | 0.2420 s |
| Parlakci (2006) | 0.2512 s |
| He, Wang, Xie e Lin (2007) | 0.3378 s |
| Peng e Tian (2008) | 0.4095 s |
| Teorema 1 ($\varepsilon = 3.72, \alpha = 0.95$) | 0.4576 s |

Tabela 2: Máximo atraso permitido para diferentes valores de τ (exemplo 2)

| τ | Peng e Tian (2008) | Teorema 1 |
|--------|--------------------|-------------------------------|
| 0.1 | 0.4767 | 0.5166 ($\varepsilon=3.72$) |
| 0.3 | 0.6059 | 0.6488 ($\varepsilon=3.72$) |
| 0.6 | 0.7829 | 0.8681 ($\varepsilon=5.33$) |
| 0.9 | – | 1.1147 ($\varepsilon=5.33$) |

Exemplo 1 Considere o NCS apresentado em (Zhang et al., 2001):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.375 & -1.15 \end{bmatrix}, \Delta A = 0, \Delta A_d = 0.$$

Aplicando o Teorema 1, com $\alpha=0.75$ e $\tau=0$ s, obtemos que o NCS em questão é estável para um atraso total variável entre 0 e 1.113 s. Este resultado é menos conservador que os valores obtidos usando os critérios presentes nos trabalhos anteriores: 0.00045 s (Zhang et al., 2001), 0.0538 s (Park et al., 2002), 0.8695 s (Yue et al., 2004), 0.87 s (Naghshtabrizi et al., 2009), 0.8871 s (Yue et al., 2005), 1.008 s (Zhu e Yang, 2008; Figueredo et al., 2009).

Exemplo 2 Considere o NCS com incertezas e atrasos variantes presente em (Peng e Tian, 2008), descrito por:

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix},$$

com as seguintes incertezas:

$$M_A = M_{A_d} = I, N_A = N_{A_d} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Considerando $\tau=0$, o limite máximo para o atraso do sistema é apresentado na Tabela 1. Observamos que nosso resultado é bastante superior aos anteriores, o que ilustra a eficácia de nosso critério. Ademais, para os casos em que $\tau > 0$, obtemos resultados ainda melhores, como ilustrado na Tabela 2, selecionando $\alpha=0.95$.

Exemplo 3 Considere o modelo de processo com incertezas respeitando a seguinte condição politópica descrita em (Naghshtabrizi et al., 2008),

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ g_1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 + g_2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

em que $|g_1| \leq 0.1$ e $|g_2| \leq 0.3$.

De acordo com (Naghshtabrizi et al., 2008), a estabilidade do sistema pode ser verificada através da análise de estabilidade para cada vértice, i.e., o sistema é estável se garantirmos a estabilidade para qualquer combinação de $A_1, A_2, B_1, e B_2$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ -0.1 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1.3 \\ -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Fridman et al. (2004) encontrou um controlador que estabiliza o sistema para um intervalo entre 0 e 0.35 s. Naghshtabrizi et al. (2008) fornece um controlador $K = -[2.5824 \quad 0.6419]$ que garante a estabilidade para um intervalo entre 0 e 0.4550 s. O nosso método fornece um controlador $K = -[1.4535 \quad 0.3589]$ que garante a estabilidade para um intervalo entre 0 e 0.5680 s. Este resultado representa uma melhoria de 25% em relação ao melhor resultado anterior.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho preocupa-se em investigar o problema de estabilização de sistemas de controle em rede com incertezas de modelo, os quais estão sujeitos a atrasos variantes no tempo e perdas de pacotes. Um novo critério de estabilização robusta é proposto baseado na solução de um conjunto de LMIs. Os exemplos numéricos demonstram a eficácia do critério proposto. A aplicação do Teorema 1 para análise de estabilidade e do Teorema 2 para projeto de um controlador que estabilize o sistema mostraram-se menos conservadoras do que os métodos apresentados em trabalhos anteriores.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e do Decanato de Pesquisa e Pós-Graduação (DPP) da Universidade de Brasília (UnB).

Referências

- Branicky, M., Phillips, S. e Zhang, W. (2000). Stability of networked control systems: explicit analysis of delay, *Proceedings of the American Control Conference* 4: 2352–2357.
- Figueredo, L., Santana, P., Alves, E., Ishihara, J., Borges, G. e Bauchspiess, A. (2009). Robust stability of networked control systems, *IEEE International Conference on Control & Automation*.
- Fridman, E., Seuret, A. e Richard, J. (2004). Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach, *Automatica* 40(8).
- Fridman, E. e Shaked, U. (2002). An improved stabilization method for linear time-delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*.

- Gu, K., Kharitonov, V. e Chen, J. (2003). *Stability of time-delay systems*, Birkhauser.
- Halevi, Y. e Ray, A. (1988). Integrated communication and control systems: Part I analysis, *J. Dyn. Sys., Meas., Control* **110**: 367–373.
- He, Y., Wang, Q.-G., Lin, C. e Wu, M. (2007). Technical communique: Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay, *Automatica* **43**(2): 371–376.
- He, Y., Wang, Q.-G., Xie, L. e Lin, C. (2007). Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay, *IEEE Transactions on Automatic Control* **52**(2).
- Hespanha, J., Naghshtabrizi, P. e Xu, Y. (2007). A survey of recent results in networked control systems, *Proceedings of the IEEE* **95**: 138–162.
- Jiang, X., Han, Q.-L., Liu, S. e Xue, A. (2008). A new H_∞ stabilization criterion for networked control systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **53**(4): 1025–1032.
- Jing, X. J., Tan, D. L. e Wang, Y. C. (2004). An LMI approach to stability of systems with severe time-delay, *IEEE Trans. Autom. Control* **49**(7).
- Lian, F.-L. (2001). *Analysis, Design, Modeling and Control of Networked Control Systems*, PhD thesis, University of Michigan.
- Naghshtabrizi, P., Hespanha, J. P. e Teel, A. R. (2008). Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems, *Systems & Control Letters* **57**(5): 378 – 385.
- Naghshtabrizi, P., Hespanha, J. P. e Teel, A. R. (2009). Stability of delay impulsive systems with application to networked control systems, *Trans. of the Institute of Measurement and Control* .
- Nilsson, J. (1998). *Real-Time Control Systems with Delays*, PhD thesis, Lund Institute of Technology, Lund.
- Park, H. S., Kim, Y. H., Kim, D. S. e Kwon, W. H. (2002). A scheduling method for network-based control systems, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **10**(3): 318–330.
- Parlakci, M. (2006). Robust stability of uncertain time-varying state-delayed systems, *IEEE Control Theory Appl.* **153**: 469–477.
- Peng, C. e Tian, Y.-C. (2008). Delay-dependent robust stability criteria for uncertain systems with interval time-varying delay, *J. Comput. Appl. Math.* **214**(2): 480–494.
- Richard, J.-P. (2003). Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems, *Automatica* **39**(10): 1667–1694.
- Seiler, P. e Sengupta, R. (2001). Analysis of communication losses in vehicle control problems, *Proceedings of the American Control Conference* **2**: 1491–1496.
- Wang, Y., Xie, L. e de Souza, C. E. (1992). Robust control of a class of uncertain nonlinear systems, *Syst. Control Lett.* **19**(2): 139–149.
- Wu, M., He, Y., She, J.-H. e Liu, G.-P. (2004). Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems, *Automatica* **40**(8).
- Yan, H., Meng, M. Q.-H. e Huang, X. (2008). Modeling and robust stability criterion of uncertain networked control systems with time-varying delays, *World Congress on Intelligent Control and Automation* pp. 188–192.
- Yang, T. C. (2006). Networked control system: a brief survey, *Control Theory and Applications* **153**: 403–412.
- Yu, J., Yu, S. e Wang, H. (2004). Survey on the performance analysis of networked control systems, *Conference on Systems, Man and Cybernetics* **6**: 5068–5073.
- Yu, M., Wang, L., Chu, T. e Hao, F. (2004). An LMI approach to networked control systems with data packet dropout and transmission delays, **4**.
- Yue, D., Han, Q.-L. e Lam, J. (2005). Network-based robust H_∞ control of systems with uncertainty, *Automatica* **41**(6): 999–1007.
- Yue, D., Han, Q.-L. e Peng, C. (2004). State feedback controller design of networked control systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* **51**(11): 640–644.
- Zhang, W., Branicky, M. S. e Phillips, S. M. (2001). Stability of networked control systems, *IEEE Control Systems Magazine* **21**: 84–99.
- Zhu, X.-L. e Yang, G.-H. (2008). New results on stability analysis of networked control systems, *American Control Conference* pp. 3792–3797.