XIX Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente – SBAI 2009
Brasília, 20 – 23 Setembro, 2009

Modelagem e Controle de Quadrirrotores

Pedro Henrique de Rodrigues Quemel e Assis Santana, Geovany Araújo Borges.

e-mails: phrqas@ieee.org, gaborges@ene.unb.br .

Laboratório de Robótica e Automação (LARA)
Grupo de Robótica, Automação e Visão Computacional (GRAV)
Departamento de Eng. Elétrica - Universidade de Brasília (UnB)

Sumário

- Introdução;
- Modelagem Matemática;
- Controle e Simulações;
- Conclusões;

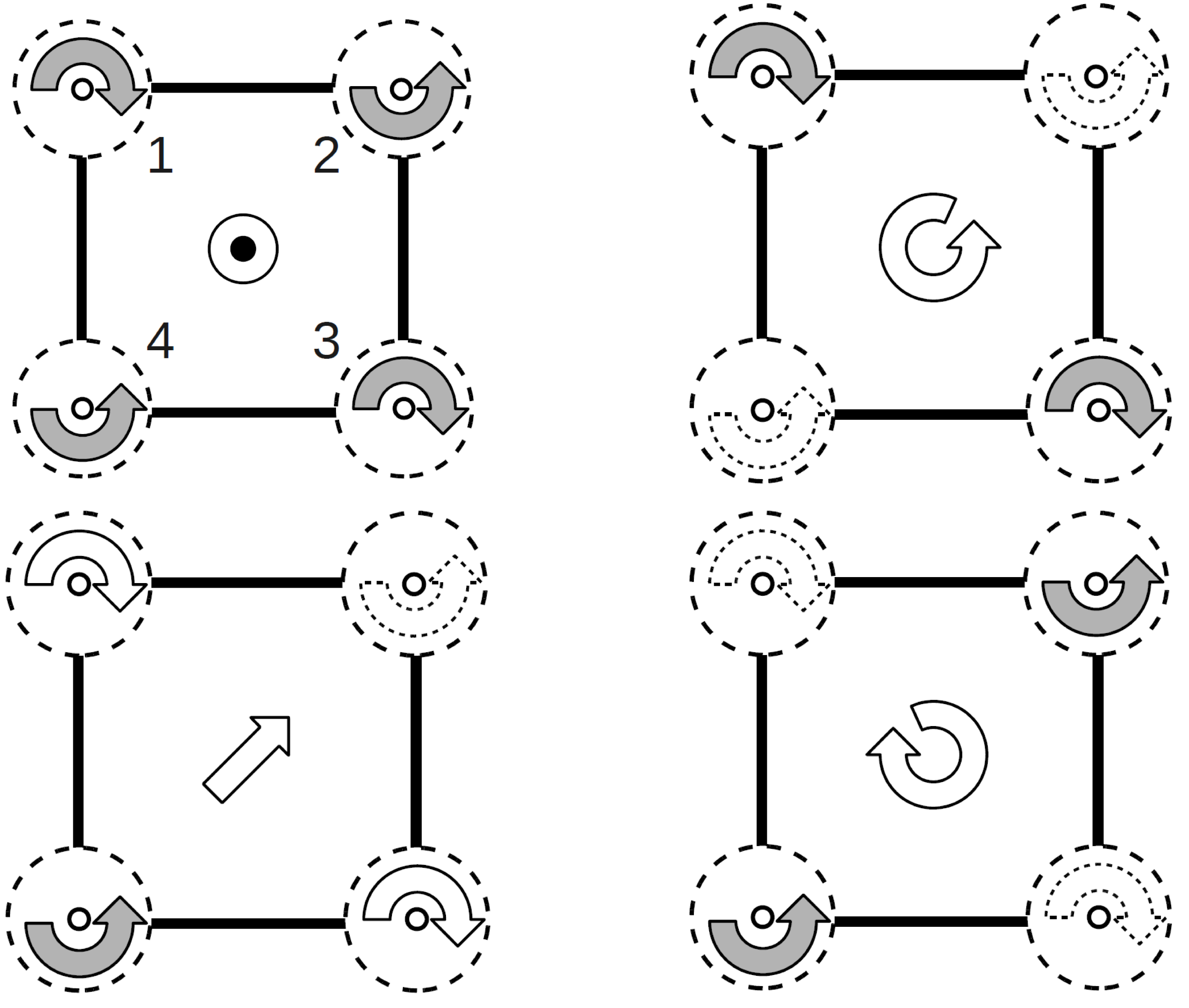
Introdução

- Helicópteros quadrirrotores:
    - Empuxo gerado por quatro hélices propulsoras;
    - Primeiros veículos HTA *(Heavier Than Air)* com capacidades VTOL *(Vertical Take off and Landing);*

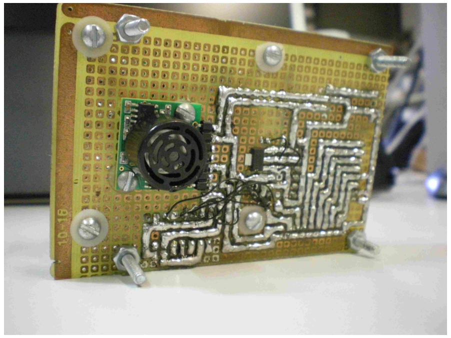
- Aplicações;
    - VANTs miniatura;
    - Vigilância, inspeção, filmagem, fotografia, lazer, etc;
    - Ambientes externos e internos;

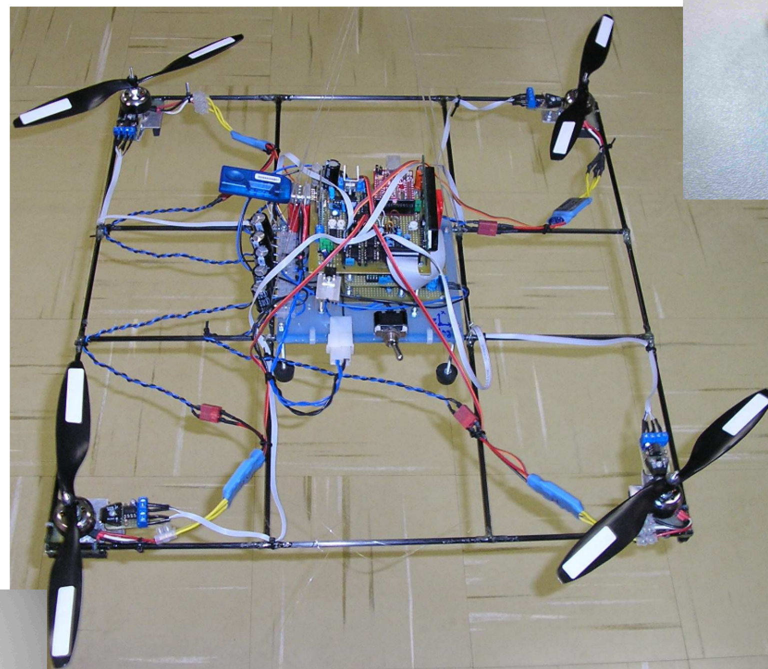
- Estabilização
    - Subatuados;
    - Forte acoplamento e não-linearidades desconhecidas;
    - Utilização de estratégias de controle lineares e não-lineares.

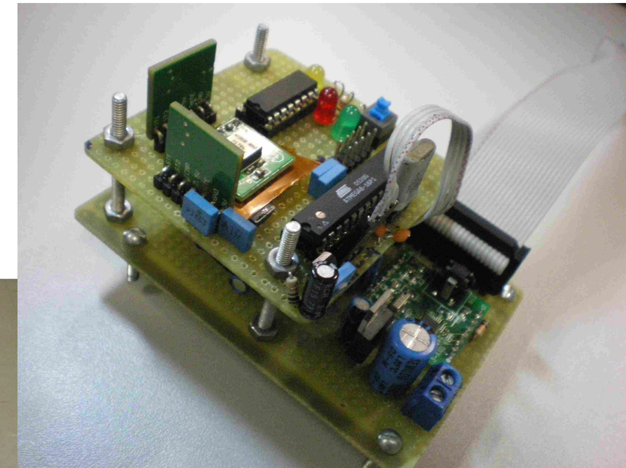
Introdução

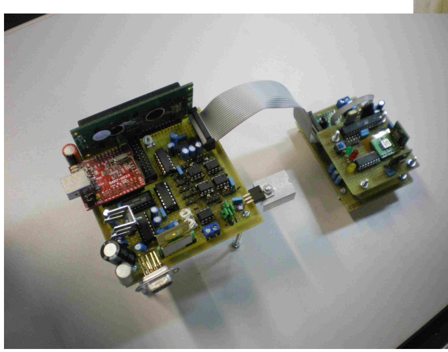


Introdução

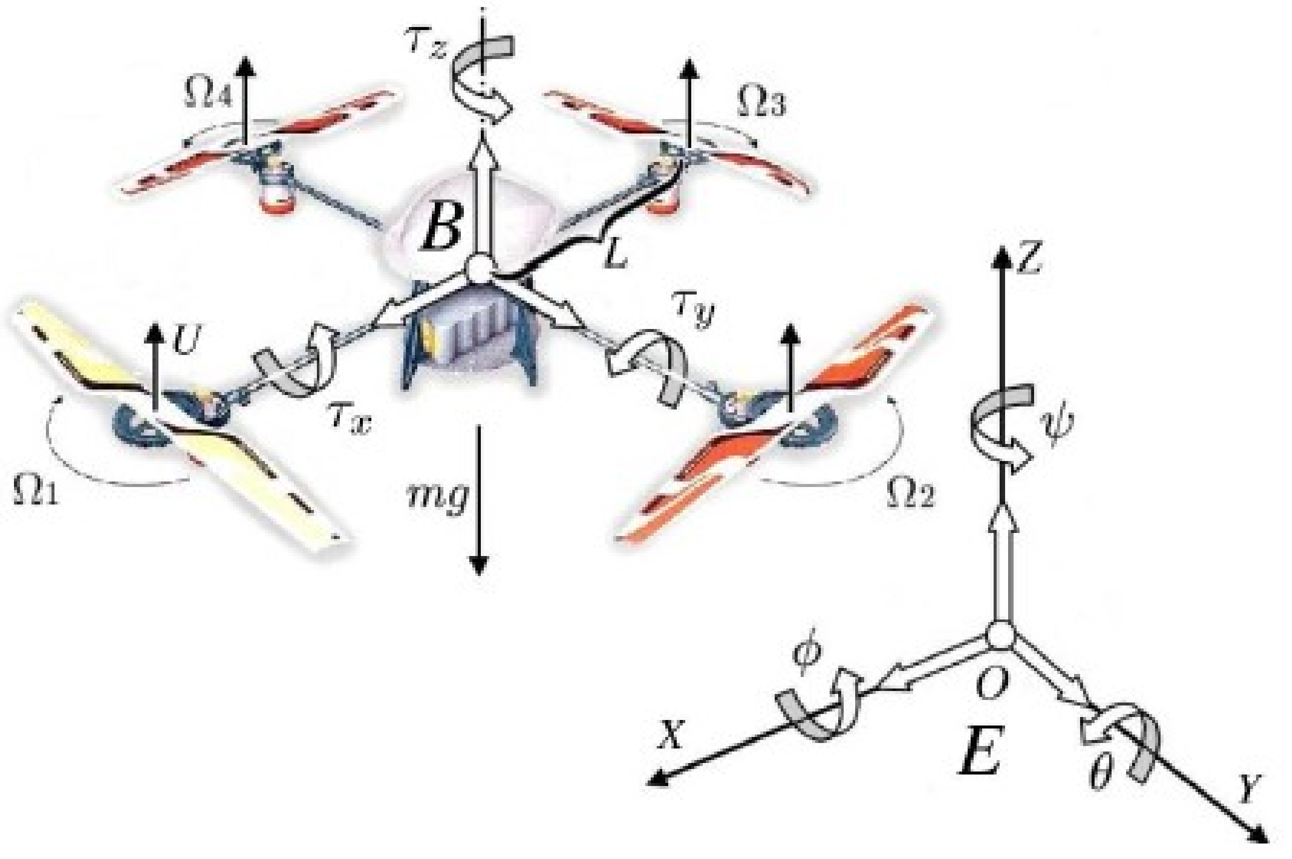








Modelagem Matemática



Modelagem Matemática

- Vetor de estados

$$\zeta = \begin{bmatrix} x & y & z & \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T$$

- Modelo do empuxo

$$U = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)$$

- Matriz de projeção do SC_B para SC_E

$$R = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & C_\psi S_\theta S_\phi - S_\psi C_\phi & C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi \\ S_\psi C_\theta & S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi C_\phi & S_\psi S_\theta C_\phi - S_\phi C_\psi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix}$$

Modelagem Matemática

- EDOs do movimento de translação
  - 2ª Lei de Newton

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= (C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi)\frac{U}{m} \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= (S_\psi S_\theta C_\phi - S_\phi C_\psi)\frac{U}{m} \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= -g + (C_\theta C_\phi)\frac{U}{m}
\end{aligned}
$$

Modelagem Matemática

- Rotação
  - Lagrangiano

$$\begin{cases} \mathscr{L} = E - V \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \rho i}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \rho i} = \gamma_i \end{cases}$$

  - Energias cinética e potencial

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} I_{xx}\left(\frac{d\phi}{dt} - \frac{d\psi}{dt}\sin(\theta)\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} I_{yy}\left(\frac{d\theta}{dt}\cos(\phi) + \frac{d\psi}{dt}\sin(\phi)\cos(\theta)\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} I_{zz}\left(\frac{d\theta}{dt}\sin(\phi) - \frac{d\psi}{dt}\cos(\phi)\cos(\theta)\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= g\int_{\mathcal{C}} (-S_\theta x_B + C_\theta S_\phi y_B + C_\phi C_\theta z_B)dm \\ &= \int_{\mathcal{C}} x_B dm(-gS_\theta) + \int_{\mathcal{C}} y_B dm(gC_\theta S_\phi) \\ &+ \int_{\mathcal{C}} z_B dm(gC_\phi C_\theta) \end{aligned}$$

Modelagem Matemática

- Torques em torno dos eixos de rotação

$$
\begin{aligned}
\tau_x &= bL(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\
\tau_y &= bL(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\
\tau_z &= d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2)
\end{aligned}
$$

Modelagem Matemática

- EDOs do movimento de rotação

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d^2\psi}{dt^2}\sin(\theta) + \frac{\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{dt}\cos(\theta)(I_{xx} + (I_{yy} - I_{zz})(2.\cos(\phi)^2 - 1))}{I_{xx}}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d\theta}{dt}^2\sin(2\phi)\frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} + \frac{1}{2}\frac{d\psi}{dt}^2\sin(2\phi)\cos(\theta)^2\frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} + \frac{\tau_x}{I_{xx}}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-\frac{d^2\psi}{dt^2}(1/2)\sin(2\phi)\cos(\theta)(I_{yy} - I_{zz})}{I_{yy}\cos(\phi)^2 + I_{zz}\sin(\phi)^2} -$$
$$\frac{\frac{1}{2}\frac{d\psi}{dt}^2\sin(2\theta)(-I_{xx} + I_{yy}\sin(\phi)^2 + I_{zz}\cos(\phi)^2)}{I_{yy}\cos(\phi)^2 + I_{zz}\sin(\phi)^2} +$$
$$\frac{\frac{d\theta}{dt}\frac{d\phi}{dt}\sin(2\phi)(I_{zz} - I_{yy})}{I_{yy}\cos(\phi)^2 + I_{zz}\sin(\phi)^2} +$$
$$\frac{\frac{d\psi}{dt}\frac{d\phi}{dt}\cos(\theta)(\cos(2\phi)(I_{yy} - I_{zz}) + I_{xx}) + \tau_y)}{I_{yy}\cos(\phi)^2 + I_{zz}\sin(\phi)^2}$$

Modelagem Matemática

- Mais EDOs do movimento de rotação

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\psi}{dt^2} \quad = \quad & \frac{\frac{d^2\phi}{dt^2}\sin(\theta)I_{xx} - \frac{d^2\theta}{dt^2}\frac{1}{2}\sin(2\phi)\cos(\theta)(I_{yy}-I_{zz})}{\cos(\theta)^2(I_{zz}\cos(\phi)^2 + I_{yy}\sin(\phi)^2) + \sin(\theta)^2 I_{xx}} - \\
& \frac{\frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt}\sin(2\theta)(I_{xx} - I_{zz}\cos(\phi)^2 + I_{yy}\sin(\phi)^2)}{\cos(\theta)^2(I_{zz}\cos(\phi)^2 + I_{yy}\sin(\phi)^2) + \sin(\theta)^2 I_{xx}} - \\
& \frac{\frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt}\sin(2\theta)(I_{xx} - I_{zz}\cos(\phi)^2 + I_{yy}\sin(\phi)^2)}{\cos(\theta)^2(I_{zz}\cos(\phi)^2 + I_{yy}\sin(\phi)^2) + \sin(\theta)^2 I_{xx}} + \\
& \frac{\frac{d\psi}{dt}\frac{d\phi}{dt}\sin(2\phi)\cos(\theta)^2(I_{yy}-I_{zz})}{\cos(\theta)^2(I_{zz}\cos(\phi)^2 + I_{yy}\sin(\phi)^2) + \sin(\theta)^2 I_{xx}} - \\
& \frac{\frac{d\theta}{dt}\frac{d\phi}{dt}\cos(\theta)(I_{xx} + (2\cos(\phi)^2 - 1)(I_{yy}-I_{zz}))}{\cos(\theta)^2(I_{zz}\cos(\phi)^2 + I_{yy}\sin(\phi)^2) + \sin(\theta)^2 I_{xx}} + \\
& \frac{\frac{1}{2}\frac{d\theta}{dt}^2\sin(2\phi)\sin(\theta)(I_{yy}-I_{zz}) + \tau_z}{\cos(\theta)^2(I_{zz}\cos(\phi)^2 + I_{yy}\sin(\phi)^2) + \sin(\theta)^2 I_{xx}}
\end{aligned}
$$

Modelagem Matemática

- O modelo de rotação anterior fui utilizado na concepção de um simulador da dinâmica de quadrirrotores;

- Complexo para ser utilizado no projeto da estratégia de controle;
  - Simplificação do modelo.

Modelagem Matemática

- Modelo simplificado para pequenos ângulos

$$\begin{cases} \sin(\alpha) \approx 0 \\ \cos(\alpha) \approx 1 \\ \omega_x \approx \frac{d\phi}{dt} \\ \omega_y \approx \frac{d\theta}{dt} \\ \omega z \approx \frac{d\psi}{dt} \end{cases}$$

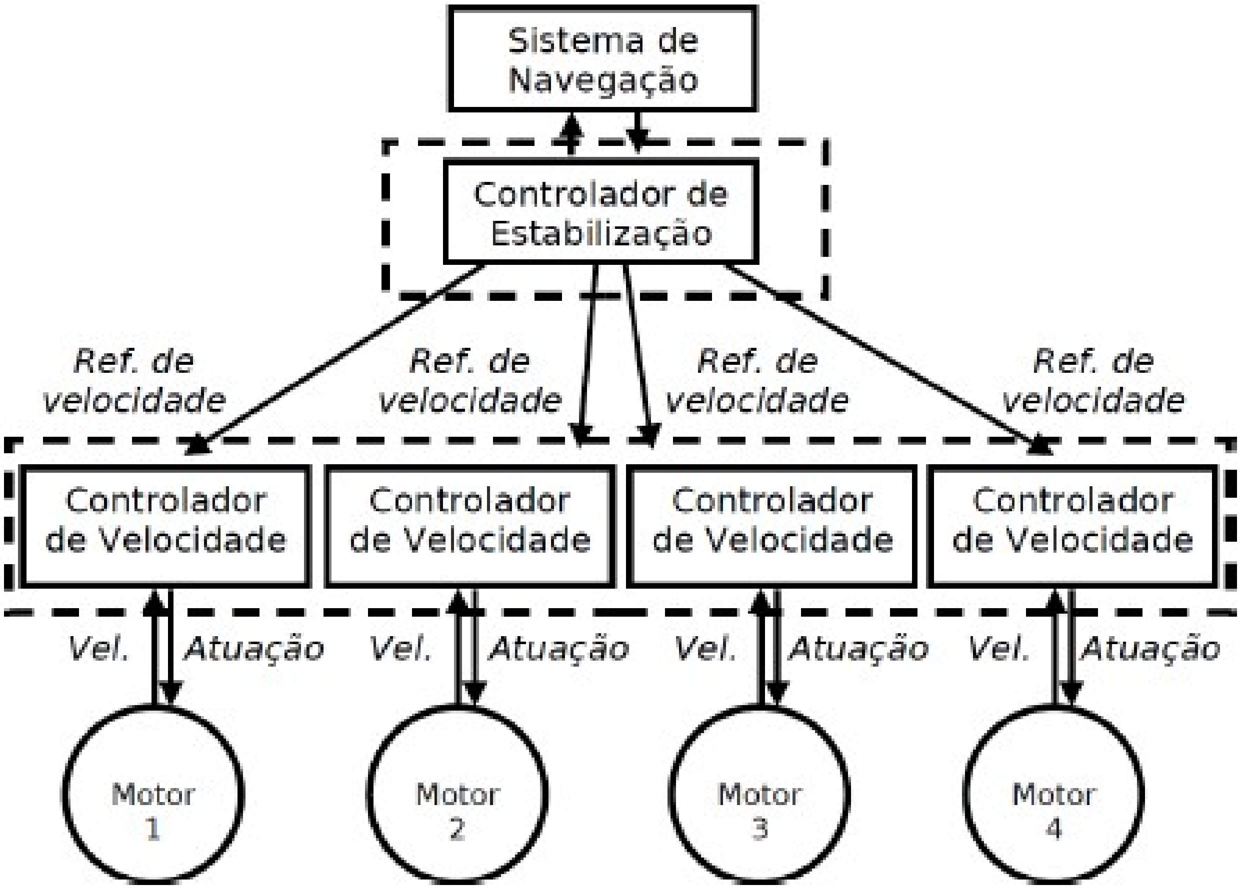
$$\begin{aligned}
\frac{d^2\phi}{dt^2} &= \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \frac{d\psi}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\tau_x}{I_{xx}} \\
\frac{d^2\theta}{dt^2} &= \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \frac{d\psi}{dt} \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tau_y}{I_{yy}} \\
\frac{d^2\psi}{dt^2} &= \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \frac{d\theta}{dt} \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tau_z}{I_{zz}}
\end{aligned}$$

Modelagem Matemática

- Conversão Torques e empuxo → Rotação dos motores

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{-bL\tau_z + 2d\tau_y - dLU}{bLd}} > 0, \\
\Omega_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{bL\tau_z - dLU + 2d\tau_x}{bLd}} > 0 \\
\Omega_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{bL\tau_z + 2d\tau_y + dLU}{bLd}} > 0 \\
\Omega_4 &= \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{bL\tau_z - dLU - 2d\tau_x}{bLd}} > 0
\end{aligned}
$$

Controle e Simulações



Controle e Simulações

- Objetivo
  - Estabilizar a atitude do quadrirrotor a uma altura constante;
- Controle linear
  - Controle PID;
  - Linearização de modelo;
- Controle Não-linear
  - Controle *Backstepping*.

Controle e Simulações

- Controle PID
  - Quatro controladores independentes: três eixos de rotação e a altitude;
  - Ações de controle somadas para determinação da atuação final.

$$\begin{cases} u_i(k) = u_i(k-1) + K_{id} T e(k), \\ u(k) = K_{pd} e(k) + u_i(k) + \frac{K_{dd}}{T}(e(k) - e(k-1)) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_x(k) \\ \tau_y(k) \\ \tau_z(k) \\ U(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_\phi(k) \\ u_\theta(k) \\ u_\psi(k) \\ u_z(k) + mg \end{bmatrix}$$

Controle e Simulações

- Linearização de modelo
  - Ponto de operação: vôo planado (todas as inclinações nulas) com altitude constante;
  - Realimentação total de estado.

$$\dot{\xi} = f(\xi, u) = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{z} \\ \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \dot{\psi}\dot{\theta} + \frac{\tau_x}{I_{xx}} \\ \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \dot{\psi}\dot{\phi} + \frac{\tau_y}{I_{yy}} \\ \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{\tau_z}{I_{zz}} \\ -g + \frac{\cos(\theta)\cos(\phi)U}{m} \end{bmatrix}$$

$$\delta\dot{\xi} = \left.\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|_{\substack{\xi = \bar{\xi} \\ u = \bar{u}}} \delta\xi + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{\xi = \bar{\xi} \\ u = \bar{u}}} \delta u$$

$$\begin{cases} \delta\xi = \xi - \bar{\xi} \\ \delta u = -K\,\delta\xi \\ u = \bar{u} + \delta u. \end{cases}$$

Controle e Simulações

- *Backstepping*
  - Estabiliza seqüencialmente as variáveis de estado do modelo;
  - Controla os 6 DOF do quadrirrotor.

$$\dot{X} = f(X,F) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 x_6 a_1 + b_1 \frac{\tau_x}{L} \\ x_4 \\ x_2 x_6 a_2 + b_2 \frac{\tau_y}{L} \\ x_6 \\ x_4 x_2 a_3 + b_3 \frac{\tau_z}{L} \\ x_8 \\ -g + (\cos(x_1)\cos(x_3))\frac{1}{m}U \\ x_{10} \\ u_x \frac{1}{m} U \\ x_{12} \\ u_y \frac{1}{m} U \end{bmatrix}$$

$$\tau_x = \frac{L}{b_1}(z_1 - a_1 x_4 x_6 - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1) - \alpha_2 z_2)$$

$$\tau_y = \frac{L}{b_2}(z_3 - a_2 x_2 x_6 - \alpha_3(z_4 + \alpha_3 z_3) - \alpha_4 z_4)$$

$$\tau_z = \frac{L}{b_3}(z_5 - a_3 x_2 x_4 - \alpha_5(z_6 + \alpha_5 z_5) - \alpha_6 z_6)$$

$$U = m\frac{(z_7 + g - \alpha_7(z_8 + \alpha_7 z_7) - \alpha_8 z_8)}{\cos(x_1)\cos(x_3)}$$

$$u_x = \frac{m}{U}(z_9 - \alpha_9(z_{10} + \alpha_9 z_9) - \alpha_{10} z_{10})$$

$$u_y = \frac{m}{U}(z_{11} - \alpha_{11}(z_{12} + \alpha_{11} z_{11}) - \alpha_{12} z_{12})$$

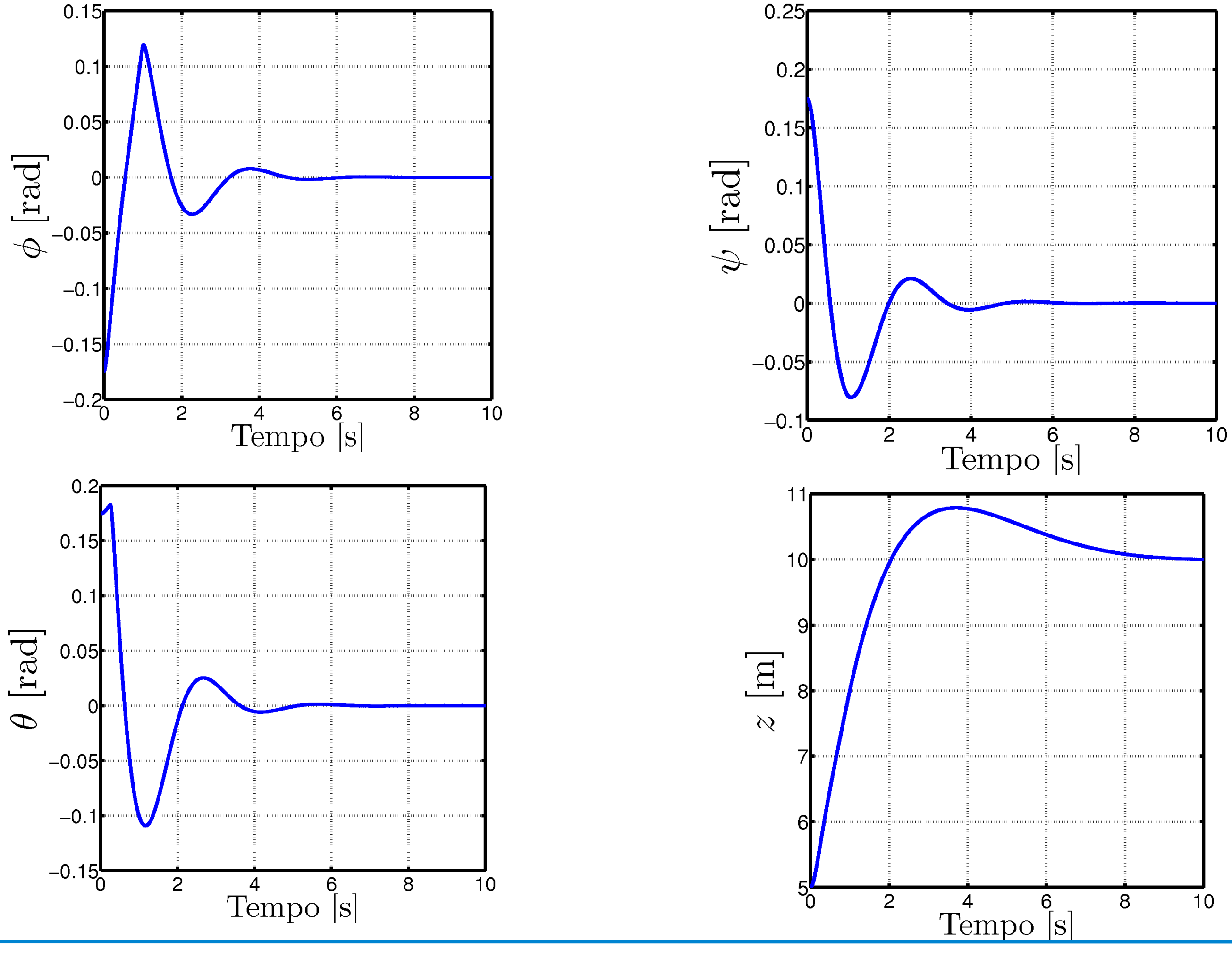
Controle e Simulações

- Parâmetros de simulação

Símbolo	Descrição	Valor
m	massa total	$1,5\ kg$
g	gravidade local	$9,81\ \frac{m}{s^2}$
I_{xx}	inércia do eixo x	$0,033\ kg.m^2$
I_{yy}	inércia do eixo y	$0,033\ kg.m^2$
I_{zz}	inércia do eixo z	$0,066\ kg.m^2$
L	meia envergadura	$0,5\ m$
b	coeficiente de empuxo	$2,64.10^{-4}\ N.s^2$
d	coeficiente de arrasto	$7,5.10^{-7}\ N.m.s^2$

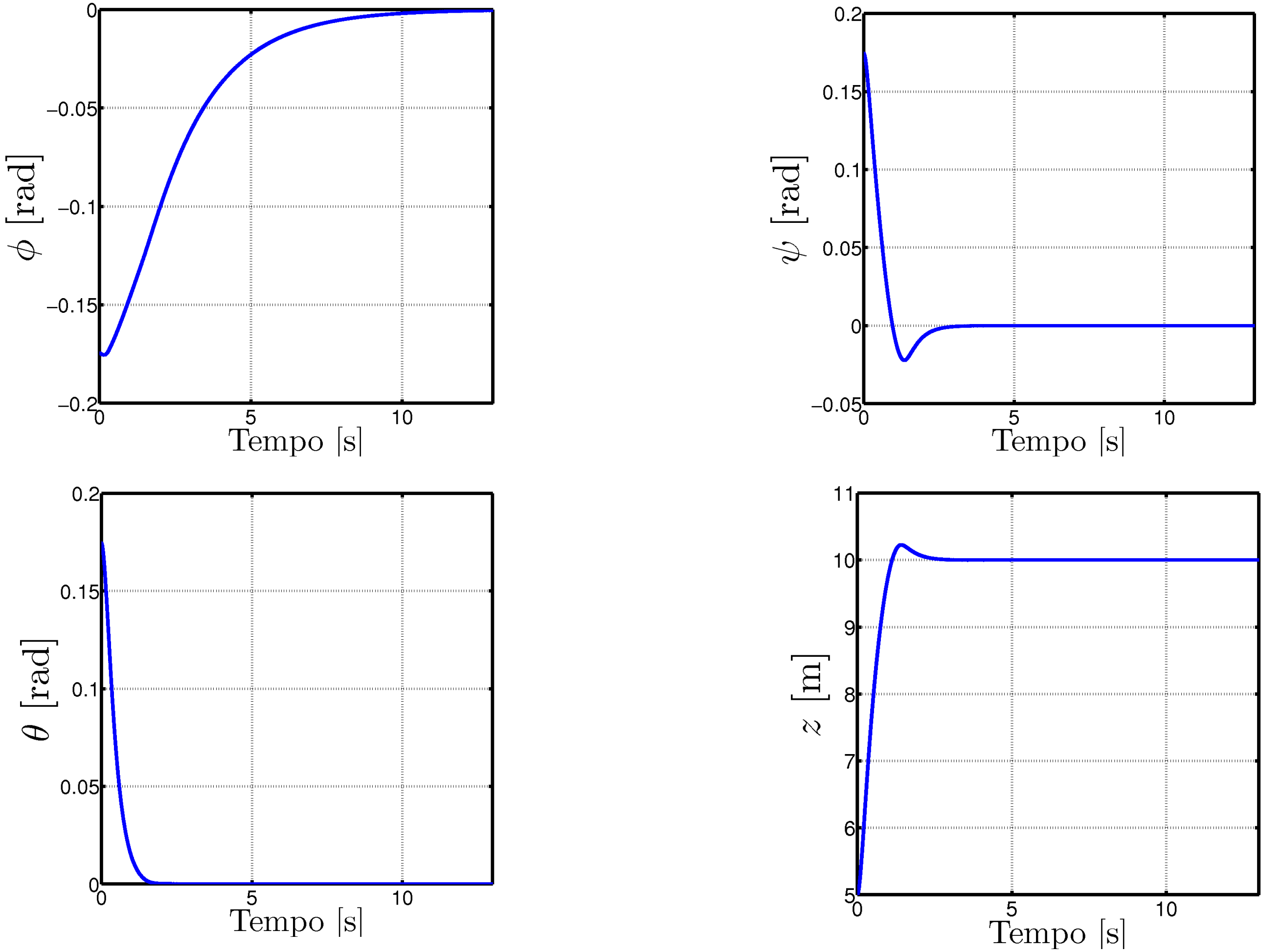
Controle e Simulações

- Controle PID



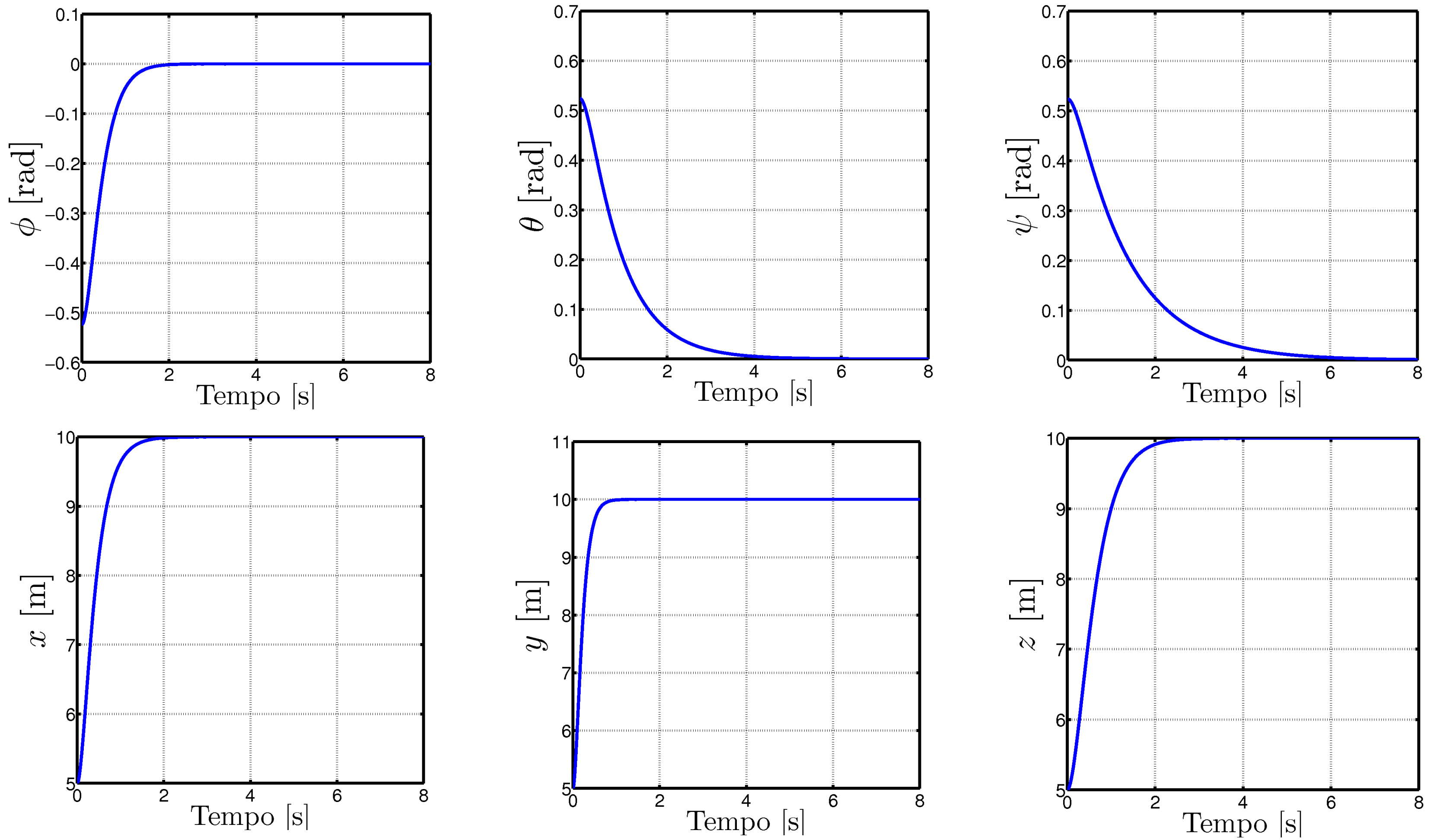
Controle e Simulações

- Linearização de modelo



Controle e Simulações

- *Backstepping*



Conclusões

- Um modelo matemático abrangendo diversas características não-lineares da dinâmica de quadrirrotores foi utilizado na concepção de um simulador;
- Três diferentes estratégias de controle em cascata foram testadas e suas viabilidades verificadas;
- Um protótipo está sendo atualmente aperfeiçoado para implementação dos resultados das simulações;
- Pretende-se utilizar as técnicas de controle linear apresentadas neste trabalho como possíveis meios para estabilizar o protótipo durante o processo de identificação de seus parâmetros de modelo, permitindo o uso de estratégias de controle mais sofisticadas no futuro;
- O resultado final esperado deste projeto é a obtenção de uma aeronave com capacidade de vôo autônomo para ser utilizada em projetos de pesquisa do laboratório e possíveis aplicações comerciais.

Perguntas ?

Obrigado pela atenção!