Interacting Multiple Model Kalman Filters (IMMKF)

Henrique M. Menegaz Pedro Henrique R.Q.A. Santana

03 de julho de 2009.

Sumário

Introdução

Situação 1

Um sistema de segurança industrial monitora o transcorrer de um processo químico. Em caso de falha, o processo necessita ser imediatamente encerrado e um alarme acionado para que a fábrica seja evacuada. Com medo de depender de um técnico para tarefa tão delicada, o gerente dá ao engenheiro encarregado a tarefa de projetar um sistema automático de detecção de falha. Estando disponíveis apenas medições ruidosas do processo, como fazer para estimar a presença de problemas?

Situação 2

Um sistema de controle de tráfego aéreo faz uso de leituras de radares para determinar as posições de diferentes aeronaves. Entretanto, por limitações do equipamento, a quantidade de objetos passíveis de detecção pelos radares é limitada, não sendo possível obter leituras de posição de todos as aeronaves simultaneamente. Além disso, a presença de ruído corrompe as medidas e dificulta a obtenção de estimativas de posição. Como fazer para estimar as coordenadas de cada aeronave para evitar colisões?

Situação 3

Um engenheiro é incumbido da tarefa de determinar os modelos de diferentes motores que fazem parte de equipamentos recém-adquiridos pela empresa. Os equipamentos foram instalados e postos em operação e não houve cuidado em se documentar a descrição de cada um deles. Agora, o engenheiro sabe as características técnicas de todos os modelos de motores existentes, mas não pode desmontar os equipamentos para determinar quem é quem. Tendo apenas medições de entrada e saída dos motores, o que pode ser feito para se determinar o modelo mais provável de cada um deles?

Abordagens de múltiplos modelos

Motivados pelas situações apresentadas, consideremos as seguintes hipóteses:

- O sistema em estudo transita entre diferentes modos (estados discretos), cada um deles caracterizado por um modelo dinâmico distinto (Figura 1);
- Sabe-se que o sistema obedece um dentre vários diferentes modelos, mas não se sabe qual (Figura 2).

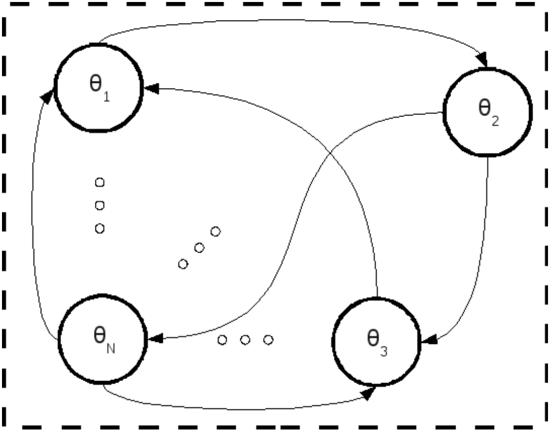

Figura 1: Sistema híbrido com chaveamento entre modelos.

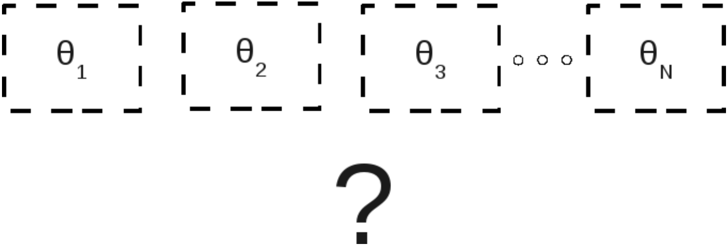

Figura 2: Hipóteses de modelo para um mesmo sistema.

Introdução ao Interacting Multiple Model (IMM)

- Artigo introdutor: H.A.P. Blom, *An Efficient Filter for Abruptly Changing Systems*, 1984 [1].
- Motivação para o desenvolvimento do algoritmo: problema de rastreamento de aeronaves em sistemas de controle de tráfego aéreo.
    - Necessidade de rastreamento de aeronaves nos modos de vôo retilíneo e manobras.

Segundo [2], temos:

- O estimador IMM é um filtro híbrido subótimo;
- É uma das melhores opções para estimação híbrida em termos de custo e eficiência;
- Sua principal característica é a sua habilidade de estimar o estado de um sistema dinâmico com diferentes modelos que chaveiam entre si;
- Filtro auto-ajustável com largura de banda variável;
- Bom compromisso entre complexidade computacional e desempenho:
  - Custo computacional aproximadamente linear em relação ao número de modos;
  - Desempenho muito semelhante ao de algoritmos com complexidade quadrática.

Estado da Arte

- Introdutores
  - H.A.P. Blom, *An Efficient Filter for Abruptly Changing Systems*, 1984 [1];
  - H.A.P. Blom e Y. Bar-Shalom, *The Interacting Multiple Model Algorithm for Systems with Markovian Switching Coefficients*, 1988 [3].
- Desempenho
  - X.R. Li e Y. Bar-Shalom, *Performance Prediction of the Interacting Multiple Model Algorithm*, 1993 [4];
  - L.A. Johnston e V. Krishnamurthy, *An Improvement to the Interacting Multiple Model (IMM) Algorithm*, 2001 [5];
  - T. Kirubarajan e Y. Bar-Shalom, *Kalman Filter Versus IMM Estimator: When Do We Need the Latter?*, 2003 [6];
  - C.E. Seah e I. Hwang, *Stability Analysis of the Interacting Multiple Model Algorithm*, 2008 [7];
- Métodos de estimação diferentes do Filtro de Kalman
  - Y. Boers e J.N. Driessen, *Interacting multiple model particle filter*, 2003 [8];
  - J. Wang, D. Zhao, W. Gao e S. Shan, *Interacting Multiple Model Particle Filter To Adaptive Visual Tracking*, 2004 [9];
  - R. Guo, Z. Qin, X. Li e J. Chen, *Interacting Multiple Model Particle-type Filtering Approaches to Ground Target Tracking*, 2008 [10];
- Telecomunicações
  - C. Ramesh e V. Vaidehi, *IMM Based Kalman Filter for Channel Estimation in UWB OFDM Systems*, 2007 [11];

- Rastreamento e estimação
  - A. Houles e Y. Bar-Shalom, *Multisensor Tracking of a Maneuvering Target in Clutter*, 1989 [12];
  - X.R. Li e Y. Bar-Shalom, *Design of an Interacting Multiple Model Algorithm for Air Traffic Control Tracking*, 1993 [13];
  - M. Yeddanapudi, Y. Bar-Shalom e K.R. Pattipati, *IMM Estimation for Multitarget-Multisensor Air Traffic Surveillance*, 1997 [14];
  - E. Mazor, A. Averbuch, Y. Bar-Shalom e J. Dayan, *Interacting Multiple Model Methods in Target Tracking: A Survey*, 1998 [2];
  - W. Schmaedeke e K. Kastella, *Sensor Management using Discrimination Gain and Interacting Multiple Model Kalman Filters*, 1998 [15];
  - Y. Bar-Shalom, X.R. Li e T. Kirubarajan, *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*, 2001 [16];
  - I. Hwang, H. Balakrishnan e C. Tomlin, *State estimation for hybrid systems: applications to aircraft tracking*, 2006 [17];
  - J. Burlet, O. Aycard, A. Spalanzani e C. Laugier, *Pedestrian Tracking in car parks : an Adaptive Interacting Multiple Models based Filtering Method*, 2006 [18];
  - J.B.B. Gomes, *An Overview on Target Tracking Using Multiple Model Methods*, 2008 [19];
  - M.E. Farmer, R.L. Hsu e A.K. Jain, *Interacting Multiple Model (IMM) Kalman Filters for Robust High Speed Human Motion Tracking*, [20].

Descrição do Sistema

Sistema linear com saltos Markovianos

$$
\begin{aligned}
x_k &= A(\theta_k)x_{k-1} + B(\theta_k)v_k \\
y_k &= C(\theta_k)x_k + D(\theta_k)w_k
\end{aligned} \tag{1}
$$

- $\theta_k \in \{1, \ldots, N\}$ é uma cadeia de Markov com matriz de transição H;
- $v_k \sim N(0, Q)$ e $w_k \sim N(0, R)$ são processos Gaussianos independentes;
- As matrizes $A(\theta_i)$, $B(\theta_i)$, $C(\theta_i)$ e $D(\theta_i)$ são conhecidas para cada modo θ_i.

Motivação para o Algoritmo

Considere o processo Markoviano (x_k, θ_k) descrito por (1). Dado um conjunto de medidas ruidosas Y_k obtidas até o instante k, queremos estimativas tanto do estado $\hat{x}_k$ quanto do modo $\hat{\theta}_k$ do sistema no instante k.

Contudo, a transição $\theta_j \longrightarrow \theta_i$ entre os modos do sistema é desconhecida, supondo-se conhecidas apenas as probabilidades $H_{i,j}$ da matriz de transição de estados H.

Como fazer para estimar $\hat{x}_k$ e $\hat{\theta}_k$?

Segundo [3], podemos dividir o problema em cinco partes. Supondo $\theta_k = i,\ i \in \{1, \ldots, N\}$, temos

1. Estimar a probabilidade do modo por predição;
$$P\left[\theta_{k-1} | Y_{k-1}\right] \to P\left[\theta_k | Y_{k-1}\right]$$
2. Atualizar a distribuição de $\hat{x}_{k-1}$ a partir da atualização de θ_k;
$$p\left[x_{k-1} | \theta_{k-1}, Y_{k-1}\right] \to p\left[x_{k-1} | \theta_k, Y_{k-1}\right]$$
3. Propagar a estimativa $\hat{x}_k$ por predição;
$$p\left[x_{k-1} | \theta_k, Y_{k-1}\right] \to p\left[x_k | \theta_k, Y_{k-1}\right]$$
4. Corrigir a estimativa $\hat{x}_k$ por meio da nova medição;
$$p\left[x_k | \theta_k, Y_{k-1}\right] \to p\left[x_k | \theta_k, Y_k\right]$$
5. Corrigir a probabilidade do modo $\theta_k = i$ por meio da nova medição;
$$P\left[\theta_k | Y_{k-1}\right] \to P\left[\theta_k | Y_k\right]$$

Determinemos expressões para cada um dos passos anteriores

1. Aplicando a equação de Chapman-Kolmogorov à cadeia de Markov θ_k, temos

$$P\left[\theta_k = i \middle| Y_{k-1}\right] = \sum_j H_{i,j} P\left[\theta_{k-1} = j \middle| Y_{k-1}\right] \rightarrow \hat{\theta}_{k|k-1}. \quad (2)$$

2. A partir da Lei da Probabilidade Total, temos a expressão

$$\begin{aligned} p\left[x_{k-1}|\theta_k = i, Y_{k-1}\right] = \sum_j &\left[p\left[x_{k-1}|\theta_{k-1} = j, \theta_k = i, Y_{k-1}\right]\right. \\ &\left.\cdot P\left[\theta_{k-1} = j|\theta_k = i, Y_{k-1}\right]\right] \quad (3) \end{aligned}$$

Como θ_k é independente de x_{k-1} se θ_{k-1} é conhecido[1], chega-se à expressão

$$p\left[x_{k-1}|\theta_{k-1}=j,\theta_k=i,Y_{k-1}\right]=p\left[x_{k-1}|\theta_{k-1}=j,Y_{k-1}\right]. \quad (4)$$

Pela fórmula de Bayes,

$$P\left[\theta_{k-1}=j|\theta_k=i,Y_{k-1}\right]=H_{i,j}\frac{P\left[\theta_{k-1}=j|Y_{k-1}\right]}{P\left[\theta_k=i|Y_{k-1}\right]}. \quad (5)$$

Substituindo (4) e (5) em (3), temos

$$p\left[x_{k-1}|\theta_k=i,Y_{k-1}\right]=\sum_j H_{i,j}P\left[\theta_{k-1}=j|Y_{k-1}\right]\frac{p\left[x_{k-1}|\theta_{k-1}=j,Y_{k-1}\right]}{P\left[\theta_k=i|Y_{k-1}\right]} \quad (6)$$

[1] A transição de estados em uma cadeia de Markov é função apenas do estado anterior.

3. Etapa de predição do Filtro de Kalman a partir do modelo (1)

$$\hat{x}_{k|k-1} = A(\hat{\theta}_{k|k-1})\hat{x}_{k-1} \tag{7}$$
$$P_{k|k-1} = A(\hat{\theta}_{k|k-1})P_{k-1}A(\hat{\theta}_{k|k-1})^T + B(\hat{\theta}_{k|k-1})QB(\hat{\theta}_{k|k-1})^T \tag{8}$$

4. Etapa de correção da estimativa do Filtro de Kalman

$$K_k = P_{k|k-1}C(\hat{\theta}_{k|k-1})^T \left(C(\hat{\theta}_{k|k-1})P_{k|k-1}C(\hat{\theta}_{k|k-1})^T + D(\hat{\theta}_{k|k-1})RD(\hat{\theta}_{k|k-1})^T \right)^{-1} \tag{9}$$
$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - C(\hat{\theta}_{k|k-1})\hat{x}_{k|k-1}) \tag{10}$$
$$P_k = (\mathbb{I} - K_k C(\hat{\theta}_{k|k-1}))P_{k|k-1}(\mathbb{I} - K_k C(\hat{\theta}_{k|k-1}))^T + K_k D(\hat{\theta}_{k|k-1})RD(\hat{\theta}_{k|k-1})^T K_k^T \tag{11}$$

5. Definindo y_k como a medição tomada no instante k, temos a seguinte relação a partir da fórmula de Bayes

$$p\left(\theta_k \middle| Y_k\right) = p\left(\theta_k \middle| y_k, Y_{k-1}\right) = \frac{p\left(y_k \middle| \theta_k, Y_{k-1}\right) p\left(\theta_k \middle| Y_{k-1}\right)}{p\left(y_k \middle| Y_{k-1}\right)} \rightarrow \hat{\theta}_k \qquad (12)$$

Observação

Para uma cadeia de Markov $\theta_k \in \{1, \ldots, N\}$, o algoritmo IMM utiliza N Filtros de Kalman, cada um deles estimando os parâmetros do modelo $\theta_k = i, i \in \{1, \ldots, N\}$.

O Algoritmo IMM

De acordo com [1, 3], o algoritmo IMM consiste dos quatro passos seguintes:

1. Sejam $\hat{p}_n(k-1)$ a probabilidade do modo $\theta_{k-1} = n$, $\hat{x}_n(k-1)$ a estimativa do Filtro de Kalman que rastreia o modo $\theta_k = n$ no instante $k-1$ e $\hat{P}_n(k-1)$ sua matriz de covariância associada. A condição inicial combinada, no instante k, para o Filtro de Kalman que rastreia o modo $\theta_k = i$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, é calculada por meio das equações

$$\bar{p}_i(k) = \sum_j H_{i,j}\hat{p}_j(k-1), \bar{p}_i(k) \neq 0, \tag{13}$$

$$\hat{x}^i(k-1) = \sum_j \frac{H_{i,j}\hat{p}_j(k-1)\hat{x}_j(k-1)}{\bar{p}_i(k)}, \tag{14}$$

$$\hat{P}^i(k-1) = \sum_j \frac{H_{i,j}\hat{p}_j(k-1)\left[\hat{P}_j(k-1) + \left(\hat{x}_j(k-1) - \hat{x}^i(k-1)\right)(\cdot)^T\right]}{\bar{p}_i(k)}. \tag{15}$$

2. O par $(\hat{x}^i(k-1), \hat{P}^i(k-1))$ é usado como condição inicial para o Filtro de Kalman que rastreia o modo $\theta_k = i$, $i \in \{1, \ldots, N\}$. A etapa de predição gera $(\bar{x}_i(k), \bar{P}_i(k))$, seguido do resultado $(\hat{x}_i(k), \hat{P}_i(k))$ da etapa de correção.
3. A probabilidade predita $\bar{p}_i(k)$ do modo $\theta_k = i$ é atualizada a partir da inovação do Filtro de Kalman de seu modo

$$\vartheta_i(k) = y_k - C(i)\bar{x}_i(k),$$
$$V_i(k) = C(i)\bar{P}_i(k)C^T(i) + D(i)RD^T(i),$$
$$\hat{p}_i(k) = \frac{\bar{p}_i(k)}{c\|V_i(k)\|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\vartheta_i^T(k)V_i^{-1}(k)\vartheta_i(k)\right\},$$

em que c é uma constante de normalização.

4. Finalmente, as saídas do estimador podem ser dadas por

$$\hat{x}_k = \sum_i \hat{p}_i(k)\hat{x}_i(k),$$
$$\hat{P}_k = \sum_i \hat{p}_i(k)\left[\hat{P}_i(k) + (\hat{x}_i(k) - \hat{x}_k)(\cdot)^T\right].$$

Discussão

A evolução das estimativas no algoritmo IMM advém diretamente das equações anteriormente apresentadas:

- Passo *1* $\longrightarrow$ Equações (2) e (6);
- Passo *2* $\longrightarrow$ Equações (7)-(11);
- Passo *3* $\longrightarrow$ Equação (12);

Dentre os passos do algoritmo, apenas *1* é típico do IMM [3]. Dentre suas equações, (14) e (15), derivadas de (6), merecem atenção especial. A equação (13) é a mesma que (2). O Passo *2* é uma aplicação direta das equações do Filtro de Kalman, enquanto o Passo *3* é um resultado simples da fórmula de Bayes.

Uma questão razoável neste momento:

Questão

Qual é a justificativa para a etapa de combinação de estimativas do Passo *1* do algoritmo IMM, descrita por (14) e (15)?

Esta questão pode ser respondida por meio da análise de (6), repetida abaixo por conveniência

$$p\left[x_{k-1}|\theta_k = i, Y_{k-1}\right] = \sum_j H_{i,j} P\left[\theta_{k-1} = j|Y_{k-1}\right] \frac{p\left[x_{k-1}|\theta_{k-1} = j, Y_{k-1}\right]}{P\left[\theta_k = i|Y_{k-1}\right]}$$

Reescrevendo a equação, temos

$$p\left[x_{k-1}|\theta_k = i, Y_{k-1}\right] = \sum_j \alpha_j p\left[x_{k-1}|\theta_{k-1} = j, Y_{k-1}\right]$$

Mesmo que $p[x_0|Y_0]$ seja Gaussiano, em geral $p[x_k|\theta_k = i, Y_k]$ é uma soma ponderada de N^{k-1} Gaussianas [3]. Esta soma é fruto de nosso desconhecimento acerca das transições entre os modos do sistema e o diagrama da Figura 3 procura ilustrá-lo.

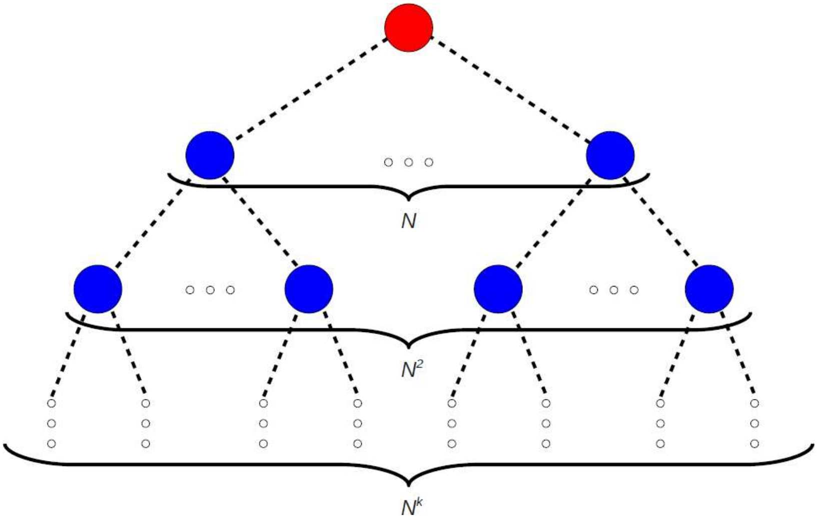

Figura 3: Diagrama de evolução do histórico dos modos.

Com o aumento do número k de iterações, o custo computacional de processamento de $p\left[x_{k-1}|\theta_k = i, Y_{k-1}\right]$ torna-se proibitivo e inviabiliza uma abordagem de estimação ótima, visto que seria necessário um filtro associado a cada um dos possíveis históricos dos modos [3, 19, 16].

O que fazer?

$$p\left[x_{k-1}|\theta_{k-1} = i, Y_{k-1}\right] \sim N(\hat{x}_i(k-1), \hat{R}_i(k-1)) \qquad (16)$$

(Abordagem de fusão com profundidade fixa - *Fixed depth merging approach* [3])

Com o aumento do número k de iterações, o custo computacional de processamento de $p\left[x_{k-1}|\theta_k = i, Y_{k-1}\right]$ torna-se proibitivo e inviabiliza uma abordagem de estimação ótima, visto que seria necessário um filtro associado a cada um dos possíveis históricos dos modos [3, 19, 16].

O que fazer?

$$p\left[x_{k-1}|\theta_{k-1} = i, Y_{k-1}\right] \sim N(\hat{x}_i(k-1), \hat{R}_i(k-1)) \qquad (16)$$

(Abordagem de fusão com profundidade fixa - *Fixed depth merging approach* [3])

Substituindo (16) em (6) e definindo $W = \{x_{k-1}|\theta_k = i, Y_{k-1}\}$, temos

$$\begin{aligned}
p\left[W\right] &= \sum_j H_{i,j} P\left[\theta_{k-1} = j | Y_{k-1}\right] \frac{p\left[x_{k-1}|\theta_{k-1} = j, Y_{k-1}\right]}{P\left[\theta_k = i | Y_{k-1}\right]}, \\
\hat{x}^i(k-1) &\triangleq E\left\{W\right\} \\
&= \sum_j \frac{H_{i,j}\hat{p}_j(k-1)\hat{x}_j(k-1)}{\bar{p}_i(k)} \rightarrow (14), \\
\hat{P}^i(k-1) &\triangleq E\left\{(W - E\{W\})(W - E\{W\})^T\right\}, \\
&= \sum_j \frac{H_{i,j}\hat{p}_j(k-1)\left[\hat{P}_j(k-1) + \left(\hat{x}_j(k-1) - \hat{x}^i(k-1)\right)(\cdot)^T\right]}{\bar{p}_i(k)} \rightarrow (15).
\end{aligned}$$

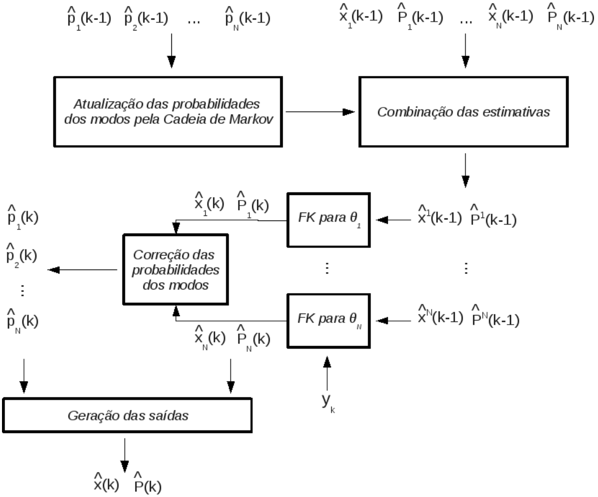

Figura 4: Diagrama do algoritmo IMM.

Modelos Múltiplos Autônomos (AMM)

1. Caso particular do IMM $\Longrightarrow H = \mathbb{I}_{N \times N}$;
2. Cada filtro opera de forma independente;
3. Suposições:
    - O modelo verdadeiro é invariante no tempo;
    - o modelo verdadeiro sempre opera como um dos modos do modelo.
4. Não lida adequadamente com sistemas que transitam entre os seus modos.

Descrição do problema

Problema

Rastreador para um sistema de Controle de Tráfego Aéreo (CTA) [16].

Estimadores

- Filtro de Kalman para movimento uniforme;
- Filtro de Kalman para manobra;
- Filtro IMM de dois modos.

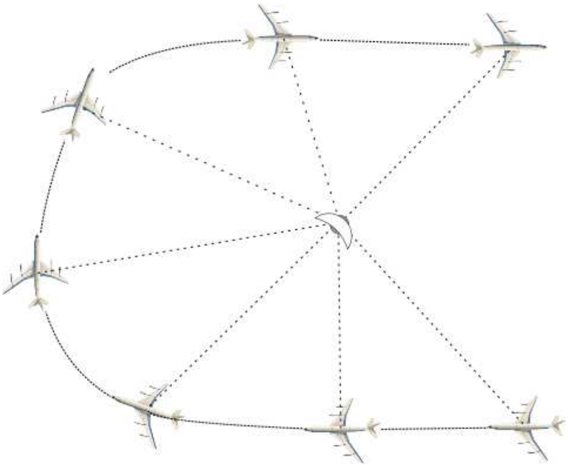

Figura 5: Rastreamento de aeronave.

Modelamento do CTA

Modos de operação de um avião civil

- Movimento uniforme $\Longrightarrow$ linha reta com velocidade e curso constante.
- Manobra $\Longrightarrow$ curva, subida ou descida.

Movimento Uniforme (MU)

Ruído branco de aceleração

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & T \end{bmatrix} v(k)$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + w(k)$$

$$x = [\xi \ \dot{\xi} \ \eta \ \dot{\eta}]'$$

- ξ e η são as coordenadas (posição) do plano cartesiano.
- $v_k \sim N(0, Q)$ e $w_k \sim N(0, R)$ são ruídos Gaussianos independentes.

Modelo de Manobra

Coordinated turn

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\Omega(k)T)}{\Omega(k)} & 0 & -\frac{1-\cos(\Omega(k)T)}{\Omega(k)} & 0 \\ 0 & \cos(\Omega(k)T) & 0 & -\sin(\Omega(k)T) & 0 \\ 0 & \frac{1-\cos(\Omega(k)T)}{\Omega(k)} & 1 & \frac{\sin(\Omega(k)T)}{\Omega(k)} & 0 \\ 0 & \sin(\Omega(k)T) & 0 & \cos(\Omega(k)T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} v(k)$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + w(k)$$

$$x = [\xi \ \dot{\xi} \ \eta \ \dot{\eta} \ \Omega]'$$

- ξ e η são as coordenadas (posição) do plano cartesiano.
- Ω é a velocidade angular.
- $v_k \sim N(0, Q)$ e $w_k \sim N(0, R)$ são ruídos Gaussianos independentes.

Linearização da Função

Para velocidade angular não constante, torna-se necessário utilizar alguma técnica de filtragem não-linear, tendo sido escolhido o Filtro de Kalman Estendido (EKF).

EKF para o CT

$$x(k+1) = f[k, x(k)] + G_{CT}(k)v(k)$$

Expandindo a função f em uma série de Taylor em torno da última estimativa $\hat{x}(k|k)$ e tomando apenas o termo de primeira ordem, temos

$$x(k+1) = f[k, x(k)] + f_x(k)(x(k) - \hat{x}(k|k)) + G_{CT}(k)v(k)$$

em que

$$
\begin{aligned}
f_x(k) &= \left[\nabla_x f(k,x)'\right]'\Big|_{x=\tilde{x}(k|k)} \\
&= \begin{bmatrix}
1 & \frac{\sin(\Omega(k)T)}{\Omega(k)} & 0 & -\frac{1-\cos(\Omega(k)T)}{\Omega(k)} & f_{\Omega,1}(k) \\
0 & \cos(\Omega(k)T) & 0 & -\sin(\Omega(k)T) & f_{\Omega,2}(k) \\
0 & \frac{1-\cos(\Omega(k)T)}{\Omega(k)} & 1 & \frac{\sin(\Omega(k)T)}{\Omega(k)} & f_{\Omega,3}(k) \\
0 & \sin(\Omega(k)T) & 0 & \cos(\Omega(k)T) & f_{\Omega,4}(k) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
f_{\Omega,1}(k) \\ f_{\Omega,2}(k) \\ f_{\Omega,3}(k) \\ f_{\Omega,4}(k)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{\cos(\Omega(k)T)T\dot{\xi}}{\Omega(k)} - \frac{\sin(\Omega(k)T)\dot{\xi}}{\Omega(k)^2} - \frac{\sin(\Omega(k)T)T\dot{\eta}}{\Omega(k)} - \frac{(-1+\cos(\Omega(k)T))\dot{\eta}}{\Omega(k)^2} \\
-\sin(\Omega(k)T)T\dot{\xi} - \cos(\Omega(k)T)T\dot{\eta} \\
\frac{\sin(\Omega(k)T)T\dot{\xi}}{\Omega(k)} - \frac{(-1+\cos(\Omega(k)T))\dot{\xi}}{\Omega(k)^2} + \frac{\cos(\Omega(k)T)T\dot{\eta}}{\Omega(k)} - \frac{\sin(\Omega(k)T)\dot{\eta}}{\Omega(k)^2} \\
\cos(\Omega(k)T)T\dot{\xi} - \cos(\Omega(k)T)T\dot{\eta}
\end{bmatrix}
$$

obs: para Ω pequeno, usa-se $lim_{\Omega\to 0}(f_x(k))$

Modelo EKF para CT final

Predição

$$\hat{x}(k+1|k) = f[k, \hat{x}(k|k)]$$

$$P(k+1|k) = f_x(k)P(k|k)f_x(k)' + G_{CT}Q(k)G_{CT'}'$$

Mistura de estados com diferentes dimensões

- $\dim(MU) = 4$ e $\dim(CT) = 5 \Longrightarrow$ problema na mistura do IMM;
- Solução: aumenta o estado do modo que for usar o MU como modelo.

Escolha dos Parâmetros

Comentários

- É bom que o ruído de processo do MU seja pequeno, mas pode ser usado um pouco grande para modelar pequenas curvas e acelerações.
- O ruído de processo do CT depende de quanto se espera de velocidade angular e de quantos modelos serão usados.
- A matriz de transição de probabilidade não influencia muito $\Longrightarrow$ probabilidades baseadas no tempo médio em cada modo.

Simulação

Simulating. Please, wait.

Conclusões

- Realizar a estimação linear ótima de sistemas com parâmetros Markovianos é computacionalmente impraticável, visto que a quantidade de hipóteses é $O(N^k)$. O estimador IMM tem custo aproximadamente linear com o número de modos, enquanto suas estimativas são comparáveis a de métodos de complexidade quadrática;
- Em aplicações práticas de filtragem com número de modos $N = 2$, o algoritmo IMM é a melhor primeira escolha [3];
- A aproximação introduzida por (16) pode tornar o estimador IMM inadequado em situações em que o número N de modos é grande. Nestes casos, deve-se considerar algoritmos de maior complexidade;
- A escolha dentre múltiplos do método AMM é um caso particular do IMM;
- Em geral, o Filtro de Kalman fornece estimativas inferiores às de um estimador IMM adequadamente ajustado [16];
- A capacidade do estimador IMM de detectar rapidamente transições entre modos do sistema (manobras) torna-o uma boa escolha para situações de rastreamento de alvos [16];
- Caso os múltiplos modelos estimados sejam semelhantes, o estimador IMM não é capaz distingui-los, tornando-o uma versão "disfarçada" do FK;
- A revisão do estado da arte mostrou que a abordagem IMM pode ser aplicada em muitos casos reais;

[1] H.A.P. Blom.
An efficient filter for abruptly changing systems.
Proceeding of 23rd Conference on Decision and Control, 4(30):656–658, Dezembro 1984.

[2] E. Mazor, A. Averbuch, Y. Bar-Shalom, and J. Dayan.
Interacting multiple model methods in target tracking: A survey.
IEEE Transactions on Aerospace and Eletronic Systems, 34(1):103–123, Janeiro 1998.

[3] H.A.P. Blom and Y. Bar-Shalom.
The interacting multiple model algorithm for systems with markovian switching coefficients.
IEEE Transactions on Automatic Control, 33(8):780–783, Agosto 1988.

[4] X.R. Li and Y. Bar-Shalom.
Performance prediction of the interacting multiple model algorithm.
IEEE Transactions on Aerospace and Eletronic Systems, 29(3):755–771, Julho 1993.

[5] L.A. Johnston and V. Krishnamurthy.
An improvement to the interacting multiple model (IMM) algorithm.
IEEE Transactions on Signal Processing, 49(12):2909–2923, Dezembro 2001.

[6] T. Kirubarajan and Y. Bar-Shalom.
Kalman filter versus imm estimator: When do we need the latter?
IEEE Transactions on Aerospace and Eletronic Systems, 39(4):1452–1457, Outubro 2003.

[7] C.E. Seah and I. Hwang.
Stability analysis of the interacting multiple model algorithm.
American Control Conference, pages 2415–2420, Junho 2008.

[8] Y. Boers and J.N. Driessen.
Interacting multiple model particle filter.
IEE Proc.-Radar Sonar Navig., 150(5):344–349, Outubro 2003.

[9] J. Wang, D. Zhao, W. Gao, and S. Shan.
Interacting multiple model particle filter to adaptive visual tracking.
Proceedings of the Third International Conference on Image and Graphics, 2004.

[10] R. Guo, Z. Qin, X. Li, and J. Chen.
Interacting multiple model particle-type filtering approaches to ground target tracking.
Journal of Computers, 3(7):23–30, Julho 2008.

[11] C. Ramesh and V. Vaidehi.
Imm based kalman filter for channel estimation in uwb ofdm systems.
IEEE-ICSCN, pages 320–325, Fevereiro 2007.

[12] A. Houles and Y. Bar-Shalom.
Multisensor tracking of a maneuvering target in clutter.
IEEE Transactions on Aerospace and Eletronic Systems, AES-25(2):176–189, Março 1989.

[13] X.R. Li and Y. Bar-Shalom.
Design of an interacting multiple model algorithm for air traffic control tracking.
IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1(3):186–194, Setembro 1993.

[14] M. Yeddanapudi, Y. Bar-Shalom, and K.R. Pattipati.
Imm estimation for multitarget-multisensor air traffic surveillance.
Proceedings of the IEEE, 85(1):80–94, Janeiro 1997.

[15] W. Schmaedeke and K. Kastella.
Sensor management using discrimination gain and interacting multiple model kalman filters.
Lockheed-Martin Tactical Defense Systems - Eagan, 1998.

[16] Y. Bar-Shalom, X.R. Li, and T. Kirubarajan.
Estimation with Applications to Tracking and Navigation.
John Wiley & Sons, 2001.

[17] I. Hwang, H. Balakrishnan, and C. Tomlin.
State estimation for hybrid systems: applications to aircraft tracking.
IEE Proc.-Control Theory Appl., 153(5):556–566, Setembro 2006.

[18] J. Burlet, O. Aycard, A. Spalanzani, and C. Laugier.
Pedestrian tracking in car parks : an adaptive interacting multiple models based filtering method.
Proceedings of the IEEE ITSC 2006, pages 462–467, Setembro 2006.

[19] J.B.B. Gomes.
An Overview on Target Tracking Using Multiple Model Methods.
PhD thesis, Universidade Técnica de Lisboa, 2008.

[20] M.E. Farmer, R.L. Hsu, and A.K. Jain.
Interacting multiple model (imm) kalman filters for robust high speed human motion tracking.
Preprint.