



**FILTRAGEM ESTOCÁSTICA PARA SISTEMAS HÍBRIDOS
E SUAS APLICAÇÕES EM ROBÓTICA AÉREA**

PEDRO HENRIQUE DE RODRIGUES QUEMEL E ASSIS SANTANA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**FILTRAGEM ESTOCÁSTICA PARA SISTEMAS HÍBRIDOS
E SUAS APLICAÇÕES EM ROBÓTICA AÉREA**

PEDRO HENRIQUE DE RODRIGUES QUEMEL E ASSIS SANTANA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO
DE ENGENHARIA ELÉTRICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSI-
DADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.**

APROVADA POR:

**Prof. Geovany Araújo Borges, Depto. de Engenharia Elétrica / Universidade de Brasília
(Orientador)**

**Prof. Daniel Oliveira Cajueiro, Depto. de Economia / Universidade de Brasília
Examinador Externo**

**Prof. Henrique Cezar Ferreira, Depto. de Engenharia Elétrica / Universidade de Brasília
Examinador Interno**

BRASÍLIA, 28 DE FEVEREIRO DE 2011.

FICHA CATALOGRÁFICA

SANTANA, PEDRO HENRIQUE DE RODRIGUES QUEMEL E ASSIS

Filtragem Estocástica para Sistemas Híbridos e suas Aplicações em Robótica Aérea [Distrito Federal] 2011.

xi, 152p., 210 x 297 mm (ENE/FT/UnB, Mestre, Engenharia Elétrica, 2011).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Elétrica

1. Sistemas Híbridos

2. Filtragem Estocástica

3. Robótica Aérea

4. Localização 3D

I. ENE/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SANTANA, P.H.R.Q.A. (2011). Filtragem Estocástica para Sistemas Híbridos e suas Aplicações em Robótica Aérea, Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, Publicação PPGENE.DM-431/11, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 152p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Pedro Henrique de Rodrigues Quemel e Assis Santana

TÍTULO: Filtragem Estocástica para Sistemas Híbridos e suas Aplicações em Robótica Aérea.

GRAU: Mestre

ANO: 2011

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Pedro Henrique de Rodrigues Quemel e Assis Santana

Departamento de Eng. Elétrica (ENE) - FT

Universidade de Brasília (UnB)

Campus Darcy Ribeiro

CEP 70919-970 - Brasília - DF - Brasil

*Aos meus pais, Angélica e Paulo, e à
minha princesa, Luiza.*

AGRADECIMENTOS

Como é bom estar escrevendo esta seção de agradecimentos! Não só porque é a oportunidade que tenho de reconhecer oficialmente a importância de todas as pessoas queridas que me rodeiam, mas também porque isto quer dizer que a redação do trabalho acabou.

Considero absolutamente justo começar agradecendo aos meus orientadores, os professores Geovany Borges e João Ishihara, pelo enorme investimento que fizeram na minha educação e por todo o apoio que me deram desde os meus tempos de aluno de Engenharia Mecatrônica. É a eles e ao ambiente de trabalho do LARA, incluindo a sua infra-estrutura e pessoas, que atribuo a principal razão dos sucessos que colhi como integrante deste laboratório. Eu não sei até que ponto os meus caros mestres estão tristes, entusiasmados, ou até mesmo aliviados com a minha partida, mas certamente é com pesar que deixo esta que se tornou a minha segunda casa.

Aos meus pais, Maria Angélica e Paulo Henrique, ficam agradecimentos para sempre insuficientes pelo seu amor e dedicação incondicionais que me permitiram chegar onde estou hoje. Eles são meus amigos, meus exemplos, meus pontos de referência para a vida. Não há mestrado, doutorado ou pós-graduação no mundo que me ofereça aquilo que meus amados pais dedicam suas vidas a me ensinar: valores morais, éticos e de cidadania. E é por meio do meu esforço pessoal que procuro retribuir uma pequeníssima parte do que eles fazem por mim. Em cada umas das linhas deste trabalho, esconde-se um “muito obrigado” a vocês dois.

O trabalho de um aspirante a pesquisador pode ser árduo e estafante. As noites sem dormir, a pressão por prazos e desempenho e a aparente conspiração do universo contra tudo o que você faz podem representar um verdadeiro entrave à filosofia do Carpe Diem. Eu, no entanto, tenho a sorte de carregar uma flor junto ao peito, cuja beleza ilumina meus dias e cujo carinho me fortalece quando tudo o mais parece ruir. Luiza, cada página desta dissertação é uma declaração de amor a você.

Agradeço também aos meus amigos, cujos nomes não cito explicitamente com medo de esquecer-me de algum deles, pelos momentos de riso e descontração. Apesar do meu título de campeão de queda de braço do LARA, suportar o peso do trabalho não teria sido simples se não fossem vocês me ajudando a carregá-lo. Obrigado por me mostrarem que ser feliz e ser responsável não são coisas antagônicas; por compartilharem comigo garrafas verdes e semi-congeladas do maná holandês; pelo seus esforços ao tentarem livrar a minha mente do conceito de separação entre engenheiros e o restante da humanidade, uma versão moderna da histórica divisão entre romanos e bárbaros; e pelas conversas sem pé nem cabeça sobre assuntos tão esdrúxulos quanto o LoverBot.

Sou grato também aos imprescindíveis e dedicados funcionários desta Universidade de Brasília, as engrenagens que movem a instituição a qual devo a minha formação profissional e que carregarei com orgulho pela minha vida. Nisto se incluem porteiros, faxineiros, secretários, professores, cozinheiros e todos os outros membros desta comunidade que fazem da UnB uma jóia da minha querida cidade natal, Brasília.

Tão importante quanto as minhas referências bibliográficas e horas de estudo, o financiamento de meu período como aluno de mestrado possibilitou a minha dedicação integral à pesquisa. Além disso, o fomento recebido para participação em eventos científicos nacionais e internacionais permitiu a expansão de meus horizontes como aluno. Portanto, aproveito a oportunidade para agradecer o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), da Fundação de Empreendimentos Científicos e Tecnológicos (FINATEC), da organização Plena Transmissoras, do Decanato de Pesquisa e Pós-Graduação da Universidade de Brasília (DPP-UnB) e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE-UnB).

Por fim, quero agradecer ao meu chuveiro, pois foi debaixo de seus filetes mingados que encontrei boa parte das respostas para as questões que povoam esta dissertação. A todos estes e outros que contribuíram para esta minha jornada, ficam aqui meus agradecimentos.

RESUMO

FILTRAGEM ESTOCÁSTICA PARA SISTEMAS HÍBRIDOS E SUAS APLICAÇÕES EM ROBÓTICA AÉREA

Autor: Pedro Henrique de Rodrigues Quemel e Assis Santana

**Orientador: Prof. Geovany Araújo Borges, Depto. de Engenharia Elétrica /
Universidade de Brasília**

**Co-orientador: Prof. João Yoshiyuki Ishihara, Depto. de Engenharia
Elétrica/Universidade de Brasília**

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de Automação

Brasília, 28 de fevereiro de 2011

Estimação de estados a partir de informações sensoriais de sistemas operando em ambientes reais, não-controlados e possivelmente hostis é um assunto de grande interesse científico e aplicabilidade prática, ainda que seja uma tarefa difícil de ser efetuada com sucesso. Em razão das diversas, e geralmente desconhecidas, fontes de interferência atuando sobre o sistema, a hipótese de correta operação dos sensores assumida pelas técnicas de filtragem tradicionais pode se tornar inválida. Tendo em vista que falhas muitas vezes são inevitáveis e que suas conseqüências podem ser trágicas dependendo da situação, este trabalho propõe uma abordagem de sistemas híbridos para tratar de sistemas com falhas e operando sob perturbações, propondo três novos filtros híbridos (HDFE, MHMF e MHMF-2) para estimação estocástica de estados. Todos esses algoritmos, juntamente com os filtros FKE, IMM e M³H, têm seus desempenhos comparados por meio de dados reais e de simulação provenientes do sistema de localização de um veículo aéreo não-tripulado equipado com GPS, IMU e magnetômetro. Desenvolve-se o modelo matemático do sistema de localização e dá-se ênfase às questões relativas à representação de atitude e sua extração a partir de leituras dos sensores embarcados. Mostra-se que todos os filtros propostos neste trabalho superam os resultados disponíveis na literatura e conclui-se da análise dos dados que o MHMF-2 é o melhor algoritmo em termos de menores erros de estimação e complexidade computacional.

ABSTRACT

STOCHASTIC FILTERING FOR HYBRID SYSTEMS AND ITS APPLICATIONS TO AERIAL ROBOTICS

Author: Pedro Henrique de Rodrigues Quemel e Assis Santana

Advisor: Prof. Geovany Araújo Borges, Depto. de Engenharia Elétrica / Universidade de Brasília

Co-advisor: Prof. João Yoshiyuki Ishihara, Depto. de Engenharia Elétrica/Universidade de Brasília

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de Automação

Brasília, 28th February 2011

State estimation for sensory systems operating in real, uncontrolled, and possibly hostile environments is a matter of great scientific interest and practical applicability, though often difficult to accomplish. Because of the many different, and usually unknown, sources of interference acting over the system, the theoretical assumptions of correct sensor operation considered by traditional filtering techniques may not be valid. Since occasional faults are often inevitable and may have tragic outcomes depending on the situation, this work uses a stochastic hybrid systems approach to tackle the problem of faulty and heavily disturbed systems and proposes three new hybrid stochastic state estimators (HDFE, MHMF and MHMF-2). All these algorithms, along with the EKF, the IMM and the M³H filters, have their performances compared using simulated and real experimental data from an unmanned aerial vehicle's localization system equipped with GPS, IMU, and magnetometer. The localization system's mathematical model is developed and special attention is paid to the matters of attitude representation and extraction from onboard sensor data. All filters proposed in this work are shown to outperform the available results in the literature and one concludes from the analysis that the MHMF-2 is the best algorithm in terms of smaller estimation error and computational complexity.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	MOTIVAÇÃO	1
1.2	CONTEXTUALIZAÇÃO	2
1.3	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E OBJETIVOS	3
1.4	PROPOSTAS E CONTRIBUIÇÕES	4
1.5	APRESENTAÇÃO DO MANUSCRITO	7
2	FILTRAGEM DE SISTEMAS A MÚLTIPLOS MODELOS	9
2.1	INTRODUÇÃO	9
2.2	SISTEMAS A MÚLTIPLOS MODELOS	10
2.2.1	O FILTRO <i>Interacting Multiple Models</i> (IMM)	11
2.2.2	O FILTRO <i>Multiple Model Multiple Hypothesis</i> (M ³ H)	20
2.3	ESTIMAÇÃO DA MATRIZ DE PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO EM UMA CADEIA DE MARKOV	24
3	SISTEMA DE LOCALIZAÇÃO	27
3.1	INTRODUÇÃO	27
3.2	MOTIVAÇÃO: INSPEÇÃO ROBOTIZADA DE LINHAS DE TRANSMISSÃO	27
3.2.1	INSTRUMENTAÇÃO DO VANT	29
3.2.2	AQUISIÇÃO DE DADOS DO MAGNETÔMETRO	31
3.3	REPRESENTAÇÃO DA ATITUDE DO CORPO	33
3.4	EXTRAÇÃO DA ATITUDE A PARTIR DE MEDIDAS VETORIAIS	35
3.5	MODELAGEM DE UM SISTEMA DE LOCALIZAÇÃO GNSS/INS	39
3.5.1	TRANSLAÇÃO	39
3.5.2	ROTAÇÃO	40
3.5.3	DISCRETIZAÇÃO DO MODELO E DAS MEDIDAS DOS SENSORES	41
3.5.4	MODELO DO SISTEMA DE LOCALIZAÇÃO E CALIBRAÇÃO <i>online</i> DE SENSORES	42
3.5.5	VANTAGENS DA CORREÇÃO SEQUENCIAL DE ESTIMATIVAS	44
3.5.6	MODELAGEM DE FALHAS NOS SENSORES	46
3.6	QUATÉRNIOS E FILTRAGEM SOB RESTRIÇÃO	47
3.6.1	REPRESENTAÇÃO DAS MEDIDAS DOS SENSORES	48
3.6.2	CÁLCULO DE JACOBIANAS COM VARIÁVEIS CONDICIONADAS	51
3.6.3	ESTIMAÇÃO DE ESTADOS SOB RESTRIÇÕES DE IGUALDADE	54
3.6.4	NORMALIZAÇÃO DE MEDIDAS VETORIAIS	63
4	ABORDAGENS HÍBRIDAS DESENVOLVIDAS	67

4.1	INTRODUÇÃO	67
4.2	ABORDAGEM HÍBRIDA PARA O PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO	68
4.2.1	MÉTODOS CLÁSSICOS PARA TRATAMENTO DE MÚLTIPLAS HIPÓTESES	73
4.3	<i>Hybrid Data Fusion Filter</i> (HDFF): SISTEMAS HÍBRIDOS E ROBÓTICA MÓ- VEL	75
4.3.1	ALGORITMO	75
4.3.2	RESULTADOS NUMÉRICOS	78
4.4	<i>Multiple Hypotheses Mixing Filter</i> (MHMF): SEGUIMENTO DE MÚLTIPLAS HIPÓTESES	81
4.4.1	ALGORITMO	83
4.4.2	RESULTADOS NUMÉRICOS	86
4.5	NOVA VERSÃO DO MHMF (MHMF-2): GANHOS DE DESEMPENHO E ES- TABILIDADE	90
4.5.1	ALGORITMO	90
5	ANÁLISE COMPARATIVA DE DESEMPENHO	95
5.1	INTRODUÇÃO	95
5.2	SIMULAÇÕES	95
5.3	EXPERIMENTO REAL DE NAVEGAÇÃO	105
6	CONCLUSÕES	109
6.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS	109
6.2	PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS	112
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	114
	ANEXOS	123
A	TÓPICOS EM FILTRAGEM ESTOCÁSTICA	125
A.1	INTRODUÇÃO	125
A.2	O PROBLEMA DE ESTIMAÇÃO DE ESTADOS PARA SISTEMAS DISCRETOS	126
A.3	FILTRO DE KALMAN (FK)	133
A.3.1	DERIVAÇÃO DO FK (CRITÉRIO DE MÁXIMO <i>a posteriori</i>)	133
A.3.2	ALGORITMO DO FK	136
A.4	FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO (FKE)	137
A.4.1	ALGORITMO DO FKE	139
A.5	FILTRO DE KALMAN UNSCENTED (FKU)	141
A.5.1	TRANSFORMADA <i>Unscented</i> (UT)	141
A.5.2	ALGORITMO DO FKU	148

LISTA DE FIGURAS

1.1	Roteiro sugerido de leitura da dissertação.	8
2.1	Representação de sistemas MM. Em (a), temos uma relação Entrada/Saída dada por apenas um dentre M possíveis modelos, não havendo transições entre eles. Em contrapartida, em (b) a relação Entrada/Saída é dada a partir da interação de M modelos distintos, podendo ser desconhecidas as transições entre eles.	11
2.2	Diagrama do algoritmo do filtro IMM.	14
2.3	Crescimento exponencial do número de modos possíveis em uma CM com transições desconhecidas.	18
2.4	Evolução do histórico de modos das hipóteses em um sistema com apenas dois modos: branco (0) e preto (1). Os dígitos abaixo de cada hipótese no instante k representam a sua seqüência de modos até o instante $k - d$. Hipóteses identificadas com os mesmos dígitos são aquelas que devem ser fundidas. 21	21
2.5	Diagrama do algoritmo do filtro M ³ H.	22
3.1	Protótipo de VANT para inspeção de linhas de transmissão de energia elétrica. 29	29
3.2	Diagrama de blocos da instrumentação do VANT. O sistema de aquisição do magnetômetro é destacado devido à importância de sua análise neste trabalho. 30	30
3.3	Instrumentos do VANT.	31
3.4	Fluxograma do algoritmo de aquisição de dados do magnetômetro pelo <i>Controlador Sul</i>	32
3.5	Sistemas de coordenadas do corpo (b) e de referência (n). Os ângulos mostrados são denominados rolagem (ϕ), arfagem (θ) e guinada (ψ).	33
3.6	Medições vetoriais que podem ser usadas no cálculo da atitude de uma aeronave.	36
3.7	Problema de alinhamento de vetores no espaço tridimensional.	37
3.8	Sistemas b e n defasados de um ângulo β em torno de X^b	38
3.9	Diferentes métodos para correção de estimativas em algoritmos baseados em filtragem de Kalman.	45
4.1	Cadeia de Markov e suas probabilidades de transição.	69
4.2	Diagrama do algoritmo do filtro HDFS.	76
4.3	Resultados de simulação sob condições normais de operação.	79
4.4	Resultados de simulação sob condições adversas de operação do magnetômetro.	80
4.5	Estimativas de atitude e posição 3D do FKE e do HDFS.	82
4.6	Mistura de estimativas com diferentes profundidades de fusão d	83

4.7	Diagrama do algoritmo do filtro MHMF.....	86
4.8	Erros RMS de estimação da posição.....	89
4.9	Diagrama do algoritmo do filtro MHMF-2.....	93
5.1	Trajetória helicoidal da aeronave durante as simulações.....	96
5.2	Desempenho do FKE com medições perturbadas apenas por ruído de medição usual.....	97
5.3	Medidas do magnetômetro para uma simulação perturbada típica.....	98
5.4	Comparação do desempenho entre o MHMF-2 e o FKE operando sob fortes perturbações.....	101
5.5	Número de hipóteses calculadas pelo MHMF-2.....	104
5.6	Percurso no <i>campus</i> Darcy Ribeiro (Fonte: Google Earth, 15°45'49.40"S e 47°52'07.61"W, Brasília, Brasil. Data da imagem: 10/07/2008).....	106
5.7	Medições do magnetômetro para o experimento real de navegação. Setas evidenciam falhas do sensor.....	107
5.8	Resultados de estimação para o MHMF-2, o M ³ H e o FKE em um experimento real de navegação.....	108
A.1	Diagrama dos componentes envolvidos na obtenção da estimativa \hat{x}_k que aproxima o estado real x_k desconhecido, em que o filtro estocástico utiliza informações de entrada u_k e saída y_k perturbadas por ruído.....	127
A.2	Funções densidade de probabilidade para diferentes distribuições e assinalamento das estimativas \hat{x}_k^v de mínima variância (média) e \hat{x}_k^l de máxima verossimilhança Bayesiana.....	132
A.3	Propagação de incertezas através da transformação de coordenadas polares $(R_{range}, \Theta_{bear})$ para coordenadas cartesianas (x, y) em situação de alto ruído do ângulo de orientação Θ_{bear} . Para geração de (a) e (b), foram utilizadas 10.000 amostras Gaussianas.....	143
A.4	Comparação entre os métodos de Monte Carlo, UT e linearização para propagação de médias e covariâncias em situação de alto ruído do ângulo de orientação Θ_{bear}	144
A.5	Amostras para propagação de incertezas através da transformação de coordenadas polares $(R_{range}, \Theta_{bear})$ para coordenadas cartesianas (x, y) em situação de baixo ruído do ângulo de orientação Θ_{bear} . Para geração de (a) e (b), foram utilizadas 10.000 amostras Gaussianas.....	146
A.6	Comparação entre os métodos de Monte Carlo, UT e linearização para propagação de médias e covariâncias em situação de baixo ruído do ângulo de orientação Θ_{bear}	147

LISTA DE TABELAS

3.1	Modos do sistema	47
4.1	Resultados para as 100 Realizações de Monte Carlo.	88
4.2	Resultados comparativos para o SCTA com erros de modelagem.	89
5.1	Variâncias dos sensores para simulações não-perturbadas	95
5.2	Erro RMS para uma típica simulação não-perturbada e número de hipóteses ...	97
5.3	Erro RMS para uma típica simulação perturbada.....	99
5.4	Parâmetros e resultados de convergência para a simulação perturbada.....	100
5.5	Carga computacional usando dados reais dos sensores	106

LISTA DE SÍMBOLOS

Aqui estão listados os símbolos mais importantes deste trabalho, seguidos de seus significados mais comuns. Contudo, permitem-se algumas redefinições locais no texto visando à melhor compreensão de discussões específicas e o evitamento da inclusão de um número excessivo de símbolos na dissertação.

Símbolos Latinos

C_n^b	Matriz de cossenos diretores que leva do sistema b ao sistema n
I	Hipótese particular do sistema
\mathcal{I}	Conjunto das hipóteses de um sistema entre dois instantes de fusão de hipóteses
\mathbb{I}	Matriz identidade de dimensões apropriadas
J	Matriz Jacobiana
K	Ganho de Kalman
M	Número de modos do sistema
\mathbb{M}	Conjunto de modos do sistema
N	Distribuição Gaussiana ou Normal
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
O	Origem de um sistema de coordenadas
P	Matriz de covariâncias
Pr	Probabilidade discreta
Q	Matriz de covariâncias do ruído de processo
R	Matriz de covariâncias do ruído de medição
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
X, Y, Z	Eixos de um sistema de coordenadas cartesianas
\mathcal{X}	Conjunto de pontos-sigma de um FKU
\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros
a	Vetor de aceleração
b	Vetor de vieses
b	Sistema de coordenadas do corpo
d	Profundidade de fusão de hipóteses
f^b	Força específica atuando sobre o corpo
h	Função de medição ou medida do altímetro
k	Número da amostra
l^{max}	Número máximo de hipóteses consideradas pelo filtro
m	Modo do sistema ou vetor de campo magnético

\mathbf{n}	Sistema de coordenadas de referência
p	Função densidade de probabilidade ou vetor de posição
q	Quatérnio de orientação
t	Tempo ou vetor de translação
u	Vetor de entradas
v	Ruído de medição ou vetor de velocidade
w	Ruído de processo
x	Vetor de estados contínuos ou posição cartesiana
y	Vetor de medições ou posição cartesiana
z	Posição cartesiana (altura)

Símbolos Gregos

Ω	Conjunto de todas as possíveis hipóteses do sistema
Π	Matriz de Probabilidades de Transição
$\Gamma^{\mathcal{X}}$	Conjunto dos pesos dos pontos-sigma
ϵ	Limiar de eliminação de hipóteses ou termo de ruído
γ	Peso de um ponto-sigma
ω	Velocidade de rotação
$\pi_{i,j}$	Probabilidade de transição do modo i para o modo j
ϕ	Ângulo de rolagem
ψ	Ângulo de guinada
σ	Eixo de rotação
σ_{sd}	Desvio-padrão
$\sigma_X^2, \sigma_Y^2, \sigma_Z^2$	Variâncias nas componentes X , Y e Z , respectivamente
τ	Período de amostragem
θ	Ângulo de arfagem
ϑ	Termo de inovação
ξ	Vetor genérico

Sobrescritos e Subscritos

\hat{x}	Estimativa ou valor corrigido de x
\bar{x}	Valor predito ou média de x
\underline{x}	Valor de x obtido a partir de uma combinação de estimativas
E	Referente à Terra
(i)	i -ésimo elemento de um conjunto
a	Estimativa do sistema aumentado ou referente ao acelerômetro
b	Referente ao sistema de coordenadas \mathbf{b}
l	Estimativa de máxima verossimilhança Bayesiana
n	Referente ao sistema de coordenadas \mathbf{n}

r	Estimativa projetada
v	Estimativa de mínima variância
k	k -ésima amostra
x, y, z	Referente aos eixos X, Y e Z , respectivamente

Siglas

AMM	Modelos Múltiplos Autônomos (do inglês <i>Autonomous Multiple Models</i>)
CC	Curvas Coordenadas
CM	Cadeia de Markov
DCM	Matriz de Cossenos Diretores (do inglês <i>Direction Cossine Matrix</i>)
ECKF	FK com Restrição de Igualdade (do inglês <i>Equality-Constrained Kalman Filter</i>)
ECUKF	FKU com Restrição de Igualdade (do inglês <i>Equality-Constrained Unscented Kalman Filter</i>)
ERB	Estação Rádio-Base
FK	Filtro de Kalman
FKE	Filtro de Kalman Estendido
FKEC	Filtro de Kalman Estendido para Sistemas Correlatos
FKU	Filtro de Kalman <i>Unscented</i>
GNSS	Sistema Global de Navegação por Satélites (do inglês <i>Global Navigation Satellite System</i>)
GPBn	Filtro <i>Generalized Pseudo-Bayes</i> com profundidade de fusão n
HDFF	Filtro Híbrido de Fusão de Dados (do inglês <i>Hybrid Data Fusion Filter</i>)
IHM	Interface Homem-Máquina
IMM	Múltiplos Modelos Interativos (do inglês <i>Interacting Multiple Model</i>)
IMU	Central de Medições Inerciais (do inglês <i>Inertial Measurement Unit</i>)
INS	Sistema de Navegação Inercial (do inglês <i>Inertial Navigation System</i>)
LARA	Laboratório de Automação e Robótica
LMI	Desigualdade Matricial Linear (do inglês <i>Linear Matrix Inequality</i>)
M ³ H	Múltiplos Modelos e Múltiplas Hipóteses (do inglês <i>Multiple Model Multiple Hypothesis</i>)
MAKF	FK com Medidas Aumentadas (do inglês <i>Measurement-Augmented Kalman Filter</i>)
MAUKF	FKU com Medidas Aumentadas (do inglês <i>Measurement-Augmented Unscented Kalman Filter</i>)
MEM	Microeletromecânico
MHE	Estimador de Horizonte Móvel (do inglês <i>Moving Horizon Estimator</i>)
MHMF	Filtro Combinador de Múltiplas Hipóteses (do inglês <i>Multiple Hypotheses Mixing Filter</i>)

MHMF-2	Nova versão do MHMF
MJLS	Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (do inglês <i>Markov Jump Linear Systems</i>)
MM	Múltiplos Modelos
MPM	Pseudo-Medida de Magnitude (do inglês <i>Magnitude Pseudo-Measurement</i>)
MPT	Matriz de Probabilidades de Transição
MRU	Movimento Retilíneo Uniforme
NCS	Sistema de Controle em Rede (do inglês <i>Networked Control System</i>)
PKF-EP	FK por Projeção de Estimativas (do inglês <i>Kalman Filter by Estimate Projection</i>)
QPM	Pseudo-Medida de Quatérnio (do inglês <i>Quaternion Pseudo-Measurement</i>)
QUEST	Estimador de Quatérnios (do inglês <i>Quaternion Estimator</i>)
RMS	Erro Médio Quadrático (do inglês <i>Root Mean Square</i>)
SCTA	Sistema de Controle de Tráfego Aéreo
SPI	Interface Serial de Periféricos (do inglês <i>Serial Peripheral Interface</i>)
SSM	Sistema com Saltos Markovianos
TRIAD	Sistema de Determinação de Atitude Tri-axial (do inglês <i>Tri-Axial Attitude Determination System</i>)
USART	Transmissor/Receptor Universal Síncrono e Assíncrono (do inglês <i>Universal Synchronous Asynchronous Receiver Transmitter</i>)
UT	Transformada <i>Unscented</i> (do inglês <i>Unscented Transform</i>)
VANT	Veículo Aéreo Não-Tripulado
VTOL	Decolagem e Pouso Verticais (do inglês <i>Vertical Take-Off and Landing</i>)
f.d.p.	Função densidade de probabilidade

1 INTRODUÇÃO

“Everything starts somewhere, although many physicists disagree.”

Terry Pratchett (Hogfather)

1.1 MOTIVAÇÃO

Nesta seção, são apresentadas algumas situações práticas relacionadas ao conteúdo desta dissertação. Os exemplos procuram motivar o leitor a se interessar pelo estudo de sistemas dinâmicos híbridos, incluindo, neste contexto, os sistemas a múltiplos modelos considerados neste trabalho.

Imagine-se no centro de controle de missões da Agência Espacial Brasileira, defronte a uma série de monitores com as informações provenientes do nosso primeiro robô de exploração espacial enviado à Lua. O intrépido robzinho tem a missão de encontrar o melhor local para instalação da futura estação lunar brasileira e carrega consigo uma série de instrumentos que permitem que ele navegue pelo terreno acidentado e arenoso do nosso satélite natural. A missão é inicialmente um sucesso, mas o ambiente hostil e o tempo levam inexoravelmente ao desgaste do equipamento, dificultando sua localização e controle. Antecipando este processo de deterioração, os engenheiros procuraram formular um modelo matemático complexo que pudesse vir a descrever a evolução do comportamento do robô ao longo do tempo. Entretanto, a capacidade computacional do robô é limitada (restrições de espaço, peso e consumo de energia) e a formulação de um modelo matemático único é uma tarefa complexa e torna difícil a extração de informações dos sensores. Felizmente, à época da construção do robô, um dos engenheiros propôs a seguinte solução: e se nós procurássemos descrever o comportamento do nosso robô não por meio de um único modelo matemático complexo, mas sim como um conjunto dinâmico de modelos mais simples? Todos estes modelos poderiam ser facilmente processados pelo *hardware* embarcado, cabendo apenas ao robô determinar a todo instante a verossimilhança destes modelos na descrição das medidas de seus sensores.

Um soldado retorna da batalha a bordo de um helicóptero avariado pelos combates. Em razão dos danos sofridos e também devido a falhas ocasionais que naturalmente ocorrem, o sistema de navegação da aeronave começa a operar de maneira irregular. Alguns sensores deixam de responder e, mais gravemente, outros começam a fornecer leituras viesadas e inverossímeis quando comparadas com o estado predito da aeronave. Algoritmos tradicionais de localização seriam capazes de lidar com sensores cujas medições cessaram, mas terminariam por incorporar as leituras incorretas dos sensores viesados, dificultando as tarefas de estabilização do helicóptero e determinação de sua rota de retorno. Caso sejam conhecidos os modos de falha mais comuns destes sensores, não seria prudente tornar o sistema de

navegação capaz de detectá-los e, se possível, corrigí-los?

É uma linda manhã de sábado e um controlador de tráfego aéreo está angustiado em um dos aeroportos de maior movimento do país. Aviões chegam de todas as partes e faz-se necessário que o sistema de radares rastreie com exatidão a posição das aeronaves para evitar acidentes. Considere, no entanto, que os pilotos nem sempre sigam exatamente as ordens da torre de comando e que exista a possibilidade de manobras inesperadas das aeronaves. Não seria interessante que o sistema de controle detectasse automaticamente estes comportamentos inesperados e provesse estimativas precisas de posição dos aviões a todo instante?

1.2 CONTEXTUALIZAÇÃO

Navegação e localização 3D de robôs são questões de extrema importância [1], especialmente no caso de robôs que operam em ambientes externos. Prover estimativas confiáveis da posição e da orientação do sistema envolve a combinação, por meio de algoritmos de filtragem, de dados de sensores próprio¹ e exteroceptivos², fornecendo assim informações sobre posição, orientação, velocidades ou qualquer outra variável espacial de interesse. Dependendo da aplicação e do tipo de sensores disponíveis, diferentes estratégias podem ser usadas para localização de robôs. Por exemplo, [2] aplica filtragem de Kalman ao problema de posicionamento e controle de orientação de navios e plataformas marítimas usando medições de bússola, inerciais e de GPS, enquanto que [3] extrai informações de um sistema visual estéreo de forma a localizar um robô e simultaneamente construir um mapa de seus arredores. Estes exemplos e grande parte dos trabalhos a respeito de fusão de dados assumem implicitamente que “dois sensores são melhores do que um”, uma idéia tornada famosa na área de robótica por [4]. Contudo, esta afirmação é válida apenas para sensores operando corretamente, i.e., não viesados. Para o caso de robôs em condições reais de operação, medidas problemáticas provenientes de apenas um dos sensores podem comprometer o desempenho do sistema de localização como um todo.

Devido a sua grande capacidade para descrição matemática de dinâmicas complexas, explorou-se a aplicabilidade do paradigma de modelagem de sistemas híbridos a problemas de robótica. Sistemas híbridos referem-se a uma ampla classe de sistemas dinâmicos cujo comportamento combina variáveis de estado contínuas e discretas [5, 6]. Em razão de sua versatilidade, o paradigma de modelagem híbrido tem sido aplicado a uma ampla variedade de situações e diversos trabalhos têm abordado o tema de estimação de estado para este tipo de sistema. Em [7], por exemplo, aplica-se filtragem de partículas para sistemas híbridos no contexto de processamento de sinais. Seguimento de alvos, uma das aplicações mais comuns de sistemas híbridos, é tratado em [8,9]. Técnicas de filtragem de Kalman robusta são usadas

¹Medem grandezas próprias do sistema, como aceleração, velocidade, rotação, inclinação, dentre outras.

²Medem grandezas externas ao sistema, como imagens, campo magnético local, velocidade do vento, etc.

em [10] para estimação de estados de sistemas híbridos com não-linearidades desconhecidas, enquanto que [11] realiza concomitantemente filtragem de Kalman robusta e diagnóstico de falhas para sistemas híbridos com incertezas.

Muitos sistemas práticos têm suas dinâmicas descritas mais fielmente por um conjunto de modelos matemáticos no lugar de uma abordagem de modelo único. Um circuito eletrônico chaveado é um exemplo simples de tal tipo de sistema, em que voltagens e correntes podem sofrer mudanças bruscas e terem suas dinâmicas alteradas dependendo dos estados lógicos das chaves. Visando à descrição de tais sistemas a múltiplos modelos (MM), uma abordagem híbrida é geralmente apropriada. Neste contexto, a porção discreta do vetor de estados geralmente denota o modo de operação do sistema e define a forma segundo a qual as variáveis de estado contínuas evoluem. Estimar o estado de tais sistemas normalmente requer a filtragem simultânea das porções discreta e contínua do vetor de estados e diversas técnicas podem ser encontradas em [9, 12–14] e suas referências. Dentre as técnicas mais importantes citadas, podemos destacar os algoritmos *Generalized Pseudo Bayes* (GPB) [15] e *Interacting Multiple Model* (IMM) [12, 16], baseados em Filtros de Kalman (FK) para múltiplos modelos.

Detecção de falhas e comportamentos anômalos em sistemas dinâmicos há muito têm sido assuntos de grande interesse, como pode ser visto na revisão apresentada em [17]. Uma forma de se lidar com medidas perturbadas consiste na consideração de diferentes conjuntos de equações de medição de forma a descrever uma dada saída do sistema. Entretanto, ter diversas equações de medição acarreta o problema de determinar-se qual dos conjuntos é o mais verossímil a cada instante de tempo. No campo de Localização e Mapeamento Simultâneos (SLAM, do inglês *Simultaneous Localization and Mapping*), por exemplo, [18] e trabalhos seguintes determinam o conjunto de equações de medição baseados na correspondência entre mapas locais e globais, que é feita por meio de testes estatísticos independentes do algoritmo de localização. Este tipo de verificação externa ao filtro, no entanto, não ocorre na abordagem de sistemas híbridos proposta neste trabalho para o sistema de localização de um robô, que incorpora testes de compatibilidade das medições e naturalmente determina o conjunto de equações de medição mais adequado sem a necessidade de verificações adicionais.

1.3 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E OBJETIVOS

Quando o campo de aplicações dos conceitos de engenharia sai das páginas dos livros didáticos e encontra a realidade, as abordagens “ideais” perdem grande parte de seu sentido. Sistemas complexos reais são difíceis de modelar, estão sujeitos a falhas e, na situação em que vidas humanas ou muito dinheiro ou ambos estão em jogo, precisam satisfazer critérios rigorosos de confiabilidade. Além disso, muitos resultados notáveis do campo da teoria do

controle mostram-se fabulosos quando simulados em computadores de última geração, mas são absolutamente infactíveis quando se está tratando de um processador embarcado em um satélite ou um robô móvel com restrições sérias de espaço e energia. Ironicamente, estes sistemas operando sob restrições são muitas vezes aqueles que precisam lidar com as piores “não-idealidades”, a saber, incertezas de modelo, corrupção de medidas sensoriais, falhas de instrumentação e estruturais, requisitos de confiabilidade em situações extremas, etc.

Motivado pelo problema de desenvolvimento de um sistema de localização 3D para um Veículo Aéreo Não-Tripulado (VANT) e também por outros projetos de robôs móveis para ambientes externos, este trabalho visou à descrição do problema de fusão de dados para sistemas robóticos reais por meio do paradigma de modelagem de sistemas híbridos. Devido a falhas ocasionais dos sensores, os filtros estocásticos tradicionais avaliados inicialmente não foram capazes de estimar os estados do sistema de maneira confiável. Este é um problema comum encontrado em muitos projetos que fazem uso de sensores microeletromecânicos (MEM) de baixo custo, tais como VANTs com restrições de carga. Neste contexto, este projeto foi dividido em duas vertentes de trabalho complementares:

Teórica Formulação de algoritmos eficientes (em termos de carga computacional e qualidade das estimativas) para extração de informação de sistemas dinâmicos estocásticos descritos sob o paradigma de modelagem de sistemas híbridos;

Prática Verificar a utilidade dos algoritmos desenvolvidos e da abordagem de sistemas híbridos em aplicações envolvendo robôs móveis, em especial o problema de localização de robôs aéreos em situações de falha de seus sensores.

1.4 PROPOSTAS E CONTRIBUIÇÕES

Assim como as vertentes de trabalho explicitadas na seção anterior, os resultados deste trabalho também podem ser categorizados em contribuições nos campos da teoria e da prática. Do ponto de vista teórico, são propostos três novos algoritmos para filtragem estocástica de sistemas híbridos. Durante o desenvolvimento destes filtros, a principal preocupação era torná-los capazes de fornecer estimativas de igual ou melhor qualidade (medida em termos do erro de estimação) quando comparados aos filtros já existentes na literatura, sem, no entanto, aumentar significativamente a carga computacional necessária para o cálculo de suas operações. Como resultado, os algoritmos de filtragem híbrida propostos em nossos trabalhos mais recentes apresentaram desempenho igual ou superior ao dos filtros clássicos com tempos de computação pouco superiores. No que diz respeito aos aspectos práticos, a pesquisa bibliográfica indicou que este trabalho propõe uma abordagem inovadora para o tratamento do problema de fusão sensorial em robótica móvel. A abordagem de sistemas híbridos adotada aqui tem por objetivo tornar a estimação de estados robusta a falhas dos

sensores e fornecer uma alternativa de comprovada utilidade aos métodos tradicionais de modelamento de robôs baseados em modelo matemático único.

Anteriormente ao aprofundamento desta dissertação no tema de filtragem estocástica, a revisão da literatura acerca de sistemas híbridos e veículos aéreos não-tripulados levou ao estudo de Sistemas de Controle em Rede (NCS, do inglês *Networked Control Systems*) e de técnicas não-lineares para estabilização de aeronaves, culminando com as seguintes publicações:

- **P.H.R.Q.A. Santana e G.A. Borges, *Modelagem e Controle de Quadrirrotores*, IX Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, SBAI, Setembro, 2009:** este trabalho trata da modelagem e controle de quadrirrotores cujos sistemas de estabilização seguem uma arquitetura em cascata. Neste tipo de sistema, uma malha externa de controle para estabilização da aeronave transmite referências de velocidade a malhas internas de controle de rotação das hélices. Este tipo de arquitetura torna o sistema de estabilização menos sensível à dinâmica do sistema de propulsão, desde que a malha interna convirja mais rapidamente que a externa. Além disso, três técnicas de estabilização lineares e não-lineares presentes na literatura são descritas e aplicadas para estabilização do modelo.
- **L.F.C. Figueredo, P.H.R.Q.A. Santana, E.S. Alves, J.Y. Ishihara, G.A. Borges e A. Bauchspiess, *Robust Stability of Networked Control Systems*, 7th IEEE Conference on Control and Automation, ICCA, Dezembro, 2009:** atrasos de comunicação em rede e perda de pacotes são questões relevantes que podem prejudicar o desempenho de NCS e até mesmo levá-los à instabilidade. Além disso, perturbações introduzidas pelo ambiente e parâmetros variantes do sistema dificultam a formulação de modelos matemáticos precisos, agregando incertezas ao modelamento de NCS. Neste trabalho, apresenta-se um critério de estabilidade robusta para NCS com incertezas e atrasos variantes no tempo baseado na solução de um conjunto de desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequality*), onde é levado em conta o aspecto da derivada temporal do atraso de comunicação. Resultados numéricos mostram que os limites obtidos pelo critério proposto para o atraso máximo de comunicação do sistema são menos conservadores do que aqueles apresentados em trabalhos anteriores.
- **P.H.R.Q.A. Santana, L.F.C. Figueredo, E.S. Alves, J.Y. Ishihara, G.A. Borges e A. Bauchspiess, *Stability of Networked Control Systems with Dynamic Controllers in the Feedback Loop*, 18th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, MED, Junho, 2010:** este trabalho foca o estabelecimento de um critério de estabilidade para NCS consistindo de um processo linear e invariante no tempo e um controlador dinâmico por realimentação. Por meio da solução de um conjunto de LMIs, encontra-se um limite máximo para os atrasos de comunicação que garante a estabilidade assintótica do sistema de controle. A inovação deste trabalho reside na

consideração de controladores dinâmicos lineares descritos na forma de espaço de estados e na proposição de uma função candidata de Lyapunov inovadora para esta situação. Resultados experimentais e de simulação reforçam a validade do critério proposto e indicam que trabalhos anteriores considerando apenas controladores proporcionais por realimentação de estados são corolários do nosso resultado.

- **L.F.C. Figueredo, P.H.R.Q.A. Santana, E.S. Alves, J.Y. Ishihara, G.A. Borges e A. Bauchspiess, *Estabilidade e Estabilização de Sistemas de Controle em Rede com Incertezas e Atrasos Variantes no Tempo*, XVIII Congresso Brasileiro de Automática, CBA, Setembro, 2010:** este artigo apresenta um novo critério para estabilização robusta de NCS sujeitos a incertezas de modelo, atrasos variantes no tempo e perdas de pacotes. A análise proposta neste artigo preocupa-se principalmente com o estabelecimento de uma matriz de ganho de realimentação que conduza o sistema à estabilidade. Além disso, os resultados obtidos determinam um limite máximo para o atraso de comunicação para o qual o sistema de controle ainda seja assintoticamente estável. O critério desenvolvido neste trabalho é baseado na solução de um conjunto de LMIs e um exemplo numérico mostra que os resultados apresentados neste artigo são menos conservadores do que aqueles obtidos em trabalhos anteriores.

Uma vez delimitado o tema da dissertação ao campo de filtragem estocástica para sistemas híbridos e tendo o sistema de localização de um VANT como plataforma experimental, a continuação da pesquisa deu origem aos seguintes trabalhos científicos:

- **P.H.R.Q.A. Santana, G.A. Borges e J.Y. Ishihara, *Hybrid Data Fusion for 3D Localization Under Heavy Disturbances*, IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS, Outubro, 2010:** a principal contribuição deste trabalho está na sua proposta inovadora de descrever o sistema de localização 3D de uma aeronave como um Sistema com Saltos Markovianos (SSM), em que cada um de seus modos discretos corresponde a uma determinada configuração de funcionamento de seus sensores. Para cada modo, as medidas dos sensores são modeladas como funções de uma configuração específica de dispositivos em bom e mau funcionamento, tornando o filtro capaz de distinguir entre várias situações de falha dos sensores e de incorporar às suas estimativas apenas as leituras não-corrompidas. Portanto, no lugar de considerar apenas um modelo de medição para os sensores do sistema, o algoritmo HDFS (*Hybrid Data Fusion Filter*) proposto neste trabalho procura ser uma melhoria sobre os métodos existentes ao ser capaz de rastrear simultaneamente múltiplos modos de operação e estimar a Matriz de Probabilidades de Transição (MPT) da cadeia de Markov por meio de um conjunto de medidas ruidosas [19];
- **P.H.R.Q.A. Santana, G.A. Borges e J.Y. Ishihara, *Métodos Híbridos de Fusão de Dados para Localização sob Condições Adversas*, VI Simpósio Brasileiro de En-**

genharia Inercial, SBEIN, Outubro, 2010: esta publicação teve como objetivo demonstrar a utilidade dos resultados do trabalho supracitado para a indústria bélica e aeronáutica nacionais;

- **P.H.R.Q.A. Santana, H.M. Menegaz, G.A. Borges e J.Y. Ishihara, *Multiple Hypotheses Mixing Filter for Hybrid Markovian Switching Systems*, 49th IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Dezembro, 2010:** a contribuição deste trabalho reside na proposição de um novo filtro híbrido baseado na fusão de múltiplas hipóteses para sistemas Markovianos chaveados. Diferentemente do IMM, que pode ser considerado um caso particular do filtro MHMF (*Multiple Hypotheses Mixing Filter*) proposto, não são impostas restrições sobre a profundidade de fusão de hipóteses e nenhum conhecimento prévio é assumido a respeito das probabilidades de transição entre os modos. Adicionalmente, faz-se uso de um passo de eliminação de hipóteses para evitar que a saída do filtro seja degradada por estimativas provenientes de hipóteses muito pouco prováveis, assim como descrito em [13]. Uma análise comparativa do IMM e do MHMF é feita em uma simulação de um Sistema de Controle de Tráfego Aéreo (SCTA);
- **P.H.R.Q.A. Santana, G.A. Borges e J.Y. Ishihara, *A New Hybrid Data Fusion Filter: Applications to Outdoor Localization of Mobile and Aerial Robots*, IEEE Transactions on Robotics, 2010. (Submetido):** este trabalho volta a abordar o problema de filtragem estocástica para sistemas híbridos e valida seus resultados teóricos por meio de simulações e experimentos reais com o sistema de localização de um VANT. Além de propor o MHMF-2, uma versão mais estável do filtro MHMF em termos da convergência de suas estimativas, a seção experimental realiza uma análise comparativa entre o Filtro de Kalman Estendido (FKE), o HDFS, o MHMF, o M³H apresentado por [20] e o MHMF-2. Os resultados numéricos apresentam o MHMF-2 como a melhor alternativa em termos de robustez das estimativas a perturbações nas medidas dos sensores, estabilidade, erro médio quadrático (RMS, do inglês *Root Mean Square*) e carga computacional.

Ao todo, este período como aluno de mestrado teve como produção científica um artigo submetido para o periódico IEEE Transactions on Robotics, quatro artigos publicados em conferências internacionais, três publicações em conferências nacionais e dois trabalhos técnicos a respeito de sistemas operacionais GNU/Linux para plataformas embarcadas.

1.5 APRESENTAÇÃO DO MANUSCRITO

Esta dissertação está organizada em seis capítulos, incluindo esta introdução, e um apêndice. Uma motivação para o estudo de sistemas a múltiplos modelos, caso particular de

sistemas dinâmicos híbridos e objeto de estudo deste trabalho, é feita no Capítulo 2, onde também são apresentados um filtro estocástico clássico (IMM) e outro recente (M^3H) disponíveis na literatura para estimação de estados deste tipo de sistema. Em seguida, o Capítulo 3 aborda questões relativas ao projeto de um sistema de localização tridimensional, em que o paradigma de modelagem de sistemas híbridos é usado para se lidar com falhas dos sensores. Atenção especial é dedicada aos temas de representação da orientação do corpo e sua extração a partir das medidas dos sensores embarcados. O Capítulo 4 contém as contribuições deste trabalho, onde são apresentados três novos filtros estocásticos para sistemas a múltiplos modelos (HDFE, MHMF e MHMF-2) e as inovações que trazem em seus algoritmos. Tomando o sistema de localização descrito no Capítulo 3 como plataforma experimental, os novos filtros propostos no Capítulo 4 são comparados àqueles do Capítulo 2 em situações reais e simuladas, sendo os resultados desta comparação apresentados no Capítulo 5. Após as conclusões do Capítulo 6, o Apêndice A traz uma pequena revisão de tópicos a respeito de filtragem estocástica que ajudam a compreender o conteúdo do trabalho. Procurando dar um encadeamento lógico aos capítulos, a Figura 1.1 apresenta um roteiro informal de leitura da dissertação.

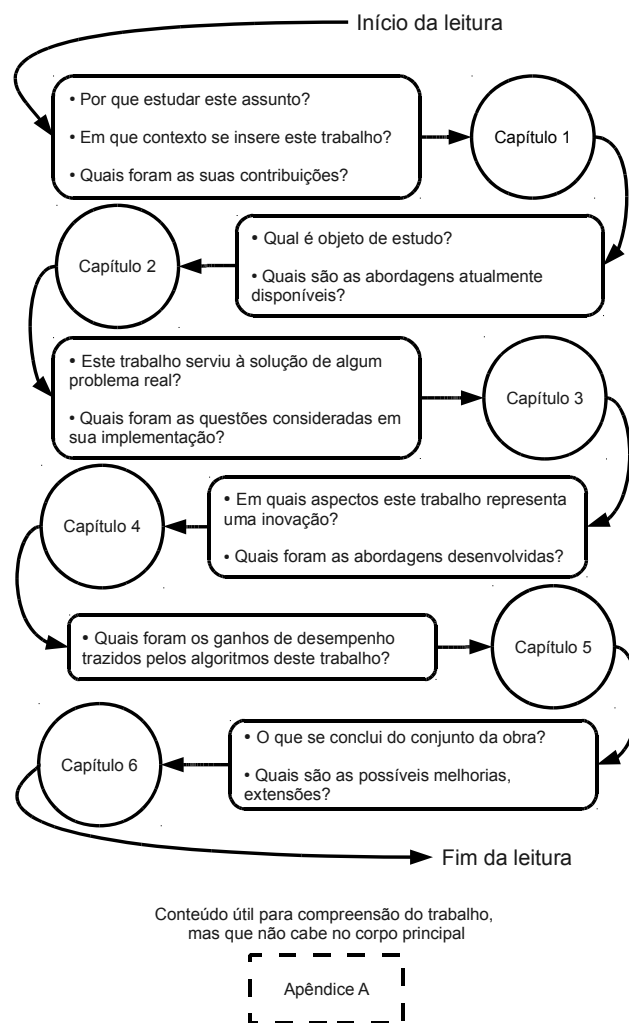


Figura 1.1: Roteiro sugerido de leitura da dissertação.

2 FILTRAGEM DE SISTEMAS A MÚLTIPLOS MODELOS

“The more I learn, the more I realize I don’t know.”

Albert Einstein

2.1 INTRODUÇÃO

Ao elencar uma série de situações reais em que técnicas tradicionais de modelamento matemático podem se mostrar insuficientes para descrever comportamentos dinâmicos complexos, o Capítulo 1 cita [5, 6] ao definir sistemas híbridos como sistemas dinâmicos que combinam variáveis de estado contínuas e discretas. Este, no entanto, é um conceito genérico de enorme abrangência, permitindo-lhe encontrar utilidade em um sem número de situações distintas. Dentre elas, estão os sistemas a múltiplos modelos, um caso particular de sistemas híbridos em que uma das variáveis de estado discretas é utilizada para denotar mudanças de modelo matemático do sistema entre modos de operação, assunto retomado no Capítulo 4 sob uma abordagem Markoviana. Esta especialização do conceito de sistemas híbridos adotada neste trabalho se justifica em virtude da utilidade que mostrou no âmbito da robótica para modelagem, detecção e correção de falhas. É interessante notar, no entanto, que as publicações da Seção 1.4 destacam que a familiarização do autor com o tema de sistemas híbridos teve início com o estudo de sistemas de controle em rede, em que a coexistência de variáveis de estado contínuas e discretas origina-se a partir das interações entre um sistema de controle¹ e uma rede de comunicação digital, em uma clara demonstração da enorme capacidade do paradigma de sistemas híbridos para abarcar a modelagem sistemas reais complexos sob um mesmo formalismo. Uma revisão abrangente a respeito de sistemas híbridos é feita por Goebel et al. em [5], trabalho premiado no ano de 2010 por seu impacto na comunidade científica.

O ponto central deste capítulo está na apresentação detalhada do filtro IMM, um algoritmo introduzido por Henk Blom em [12, 16] e cuja indiscutível importância em aplicações atuais envolvendo sistemas híbridos é ressaltada por Boers e Driessen em [20], incluindo Sistemas de Controle de Tráfego Aéreo (SCTA) e rastreadores de alvos. Em seguida à exaltação do trabalho de Blom, os autores de [20] apresentam o seu próprio filtro, o M³H, como uma alternativa viável e de desempenho superior ao IMM, razão pela qual o M³H também é descrito aqui e avaliado no Capítulo 5. Uma análise detalhada é feita acerca das inovações trazidas pelo IMM em seu passo de combinação de estimativas, pois o desempenho dos filtros do Capítulo 4 foi enormemente beneficiado pela extensão e generalização dos resultados

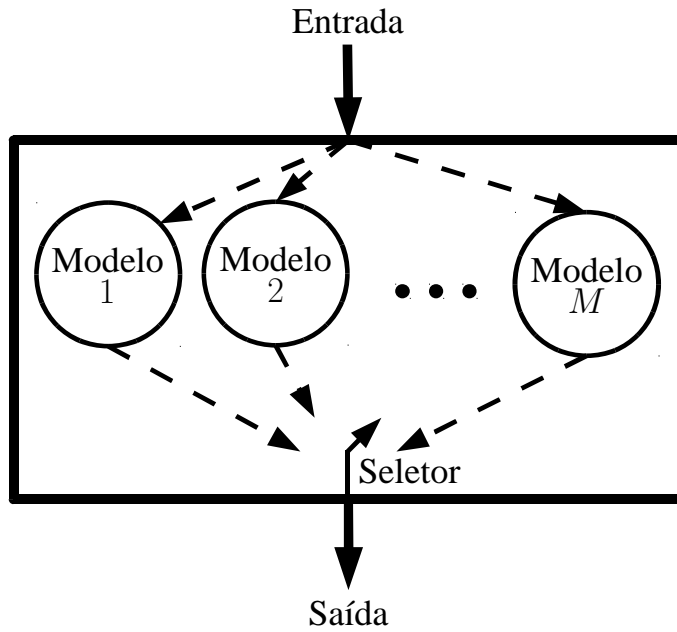
¹De acordo com [21], sistema formado por três elementos principais: a planta, que é o objeto cujo comportamento se quer controlar (temperatura do ar, posição de um braço robótico, velocidade de um automóvel, etc.); um controlador, que impõe à planta um comportamento desejado a partir de uma lei de controle pré-definida; e atuadores, que são os instrumentos por meio dos quais o controlador atua sobre a planta.

originais do IMM. Além disso, faz-se um paralelo entre o IMM e o M^3H no tratamento de sistemas dinâmicos a múltiplos modelos. Por fim, é apresentado um algoritmo para estimação de parâmetros em uma Cadeia de Markov (CM) que foi incorporado aos filtros do Capítulo 4, tornando-os menos susceptíveis a escolhas inadequadas de suas variáveis de ajuste.

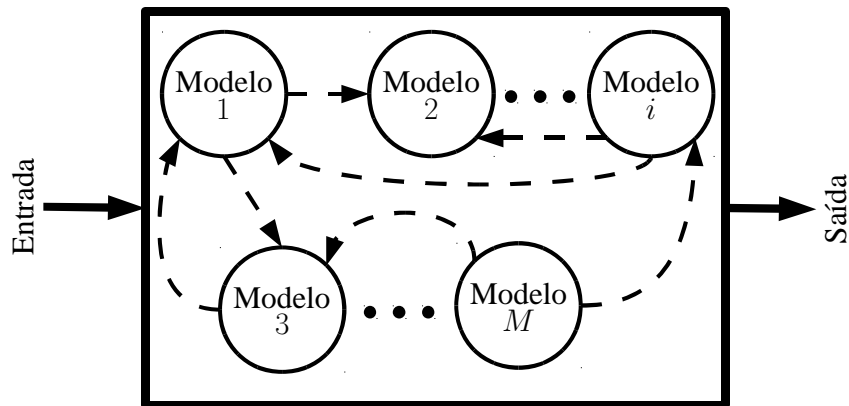
2.2 SISTEMAS A MÚLTIPLOS MODELOS

Iniciada por [22], a abordagem de sistemas a múltiplos modelos (MM) é uma poderosa ferramenta em estimação adaptativa, mostrando-se particularmente adequada em problemas envolvendo mudanças tanto estruturais quanto paramétricas [13]. Nesta situação, um conjunto de modelos é projetado para representar os possíveis padrões de comportamento do sistema (também chamados de modos de operação) e a estimativa de estado total é obtida por meio da combinação de estimativas de filtros calculados em paralelo correspondendo aos diferentes modos do sistema. Os primeiros trabalhos não consideravam saltos entre esses modos e levaram a algoritmos MM sem transições, assim como mostrado na Figura 2.1(a). Por outro lado, resultados mais recentes e realistas iniciados por [23] e ilustrados na Figura 2.1(b) propõem algoritmos MM em que ocorrem saltos entre modos significando mudanças de modelos.

Sistemas MM podem ser vistos como um caso particular de sistemas híbridos, em que uma das possíveis variáveis de estado discretas denota o modo de operação do sistema e define o modelo matemático que descreve a forma como a porção contínua do vetor de estados evolui. Em muitas aplicações práticas, tais como circuitos eletrônicos chaveados, sistemas espaciais e robótica, fazer uso de apenas um modelo matemático para descrever um comportamento dinâmico complexo pode mostrar-se demasiadamente difícil ou insuficiente, levando a resultados ruins [24]. Considere, por exemplo, o caso do robô hexápode RHex analisado em [25]. Quando em marcha, o robô exibe dinâmica intermitente em razão da flexibilidade de suas pernas e períodos de suspensão acima do solo causada pelo impulso dos motores. Em razão da dificuldade de se formular um único modelo em equações diferenciais que abarcasse todas as nuances deste comportamento, os autores optaram por modelar o robô RHex na forma de um sistema MM com dois modos de operação: o contexto de voo (*flight context*), no qual as seis pernas do robô não tocam o solo e a dinâmica do robô segue um modelo balístico; e o contexto de postura (*stance context*), em que algumas das pernas impulsionam o robô. Ao proceder desta maneira, trocou-se um problema complexo de modelagem por um conjunto de sub-modelos mais simples e que interagem entre si [26]. Talvez seja adequada a analogia entre a metodologia MM no campo da robótica e a filosofia de “Dividir e Conquistar”, técnica consagrada de *problem solving* encontrada nas mais diversas áreas do conhecimento humano, incluindo política, sociologia, economia, estratégia militar, algoritmos em ciência da computação, etc.



(a) Sistema MM sem transições de modelo.



(b) Sistema MM com transições entre diferentes modelos matemáticos.

Figura 2.1: Representação de sistemas MM. Em (a), temos uma relação Entrada/Saída dada por apenas um dentre M possíveis modelos, não havendo transições entre eles. Em contrapartida, em (b) a relação Entrada/Saída é dada a partir da interação de M modelos distintos, podendo ser desconhecidas as transições entre eles.

2.2.1 O Filtro *Interacting Multiple Models* (IMM)

O filtro IMM é um estimador híbrido subótimo que durante décadas mostrou a melhor relação custo-benefício na estimação de estados em sistemas híbridos [9]. Em particular, o IMM é um filtro auto-ajustável e com largura de banda variável em operação, tornando-o naturalmente útil no rastreamento de alvos manobráveis. De fato, a proposição do IMM por [12, 16] foi motivada pelo amplamente conhecido problema de rastreamento de aeronaves por um radar de vigilância em um Sistema de Controle de Tráfego Aéreo (SCTA). A principal característica do IMM é a sua habilidade em estimar o estado de sistemas com dinâmica chaveada por meio da “mistura” das estimativas de seu banco de estimadores, algo

que será abordado nesta e na Seção 4.2.1. Em razão disso, o IMM ainda figura entre as melhores opções de filtro para sistemas MM em termos do compromisso entre complexidade computacional e desempenho [9].

A importância do IMM no meio científico pode ser avaliada por meio da quantidade de trabalhos que este filtro influenciou. Dentre os inúmeros trabalhos que se debruçaram sobre o desenvolvimento de métodos de avaliação e melhoria do desempenho do IMM, [27] estabelece limites inferiores e superiores para as matrizes de covariâncias estimadas pelo IMM e analisa a estabilidade deste algoritmo para uma classe especial de sistemas híbridos. Li et al. propõe em [28] métodos de predição do desempenho do IMM em aplicações práticas sem ter que recorrer a simulações exaustivas, aumentando a confiabilidade dos sistemas de controle projetados. Uma análise comparativa muito interessante entre o FK e o IMM é feita em [29], em que os autores dedicam-se a encontrar parâmetros quantitativos que balizem a escolha entre uma abordagem MM e outra baseada em um único FK para o rastreamento de aeronaves. Ainda a respeito de desempenho, [30] propõe modificações no algoritmo do IMM, que fornece aproximações da estimativa de mínima variância, para torná-lo uma implementação recursiva do estimador de máximo *a posteriori* (MAP). Outro tipo de melhoria associada ao IMM é substituir o seu tradicional banco de FKs por filtros de partícula, assim como é feito em [31–34]. Ao proceder-se desta maneira, pode-se realizar a estimação de estados de sistemas chaveados fortemente não-lineares e sem a restrição de ruído branco Gaussiano em seus modelos.

Sem dúvida, a aplicação mais comum do IMM e suas variantes é no rastreamento de alvos nas mais diversas situações [8,9,35–42], em especial aeronaves. Todavia, sistemas MM não se restringem a este tipo de contexto. Por exemplo, [43] utiliza uma variação do IMM para detecção e correção de falhas no sistema de localização de um VANT, enquanto [44] utiliza um par de FKs para estimar os parâmetros de um canal de comunicação sem-fio. Independentemente das aplicações em que o IMM se insere, sua importância histórica e sua influência sobre o desenvolvimento deste trabalho justificam uma discussão mais detalhada deste filtro. Aspectos específicos do IMM são retomados no Capítulo 4.

2.2.1.1 Formulação do problema

O IMM foi inicialmente proposto em [12, 16] para ser uma nova abordagem ao problema de filtragem de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (MJLS, do inglês *Markov Jump Linear Systems*) descritos por

$$x_k = A_{m_{k-1}}x_{k-1} + B_{m_{k-1}}w_{k-1}, \quad (2.1)$$

$$y_k = H_{m_k}x_k + G_{m_k}v_k, \quad (2.2)$$

em que $k \in \mathbb{N}$ é o número da amostra obtida no instante de tempo $k\tau$, onde τ é o período de amostragem; $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados contínuos; $m_k \in \mathbb{M} \triangleq \{1, 2, \dots, M\}$ é o estado discreto do sistema (modo) e segue uma Cadeia de Markov (CM) com Matriz de

Probabilidades de Transição (MPT) $\Pi : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$, podendo assumir M diferentes valores; $A_{m_k} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x}$, $B_{m_k} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_w}$, $H_{m_k} : \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_x}$ e $G_{m_k} : \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_v}$ são matrizes conhecidas dependentes do modo; $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de medições dependentes do modo; e $v_k \in \mathbb{R}^{n_v}$, $v_k \sim N(0, R_k)$, e $w_{k-1} \in \mathbb{R}^{n_w}$, $w_{k-1} \sim N(0, Q_{k-1})$, são processos de ruído branco Gaussiano descorrelacionados, com média nula e matrizes de covariâncias R_k e Q_{k-1} , respectivamente.

O modo discreto m_k define em (2.1)-(2.2) um conjunto de M diferentes modelos em espaço de estados para descrever a dinâmica do sistema. Note-se que, em (2.2), o vetor de medição y_k atual é uma função das matrizes correspondentes ao modo atual m_k e do ruído no instante k . O mesmo não acontece em (2.1), onde o vetor de estados atual x_k é uma função de grandezas do instante anterior $k - 1$. Esta é uma consequência direta da teoria de sistemas a tempo discreto, em que se mostra que deve haver um atraso de ao menos um período de amostragem entre um estímulo ao sistema e a resposta de seu vetor de estados x_k [21]. Uma generalização desta formulação é feita na Seção 4.2 de forma a permitir que métodos de filtragem híbridos sejam aplicados ao sistema de localização de uma aeronave.

2.2.1.2 Algoritmo

A partir de um conjunto de medições corrompidas por ruído $y_{1:k} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$, queremos obter estimativas do vetor de estado contínuo do sistema \hat{x}_k , de sua matriz de covariâncias associada \hat{P}_k e do vetor de probabilidades dos modos $\hat{p}(m_k)$. Ainda que se assuma que a MPT

$$\Pi = \{\pi_{i,j}\}, \pi_{i,j} = \Pr\{m_k=j | m_{k-1} = i\}, i, j \in \mathbb{M}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad (2.3)$$

seja conhecida, as transições $m_{k-1} = i \rightarrow m_k = j$ entre modos da CM podem ser desconhecidas. A solução proposta por [12] divide o problema nas seguintes cinco etapas:

i Estimar as probabilidades dos modos por predição;

$$\Pr(m_{k-1} | y_{1:k-1}) \xrightarrow{\text{Modelo da CM}} \Pr(m_k | y_{1:k-1})$$

ii Atualizar a distribuição de x_{k-1} a partir da atualização de m_k ;

$$p(x_{k-1} | m_{k-1}, y_{1:k-1}) \xrightarrow{\text{“Mistura” de estimativas}} p(x_{k-1} | m_k, y_{1:k-1})$$

iii Propagar a estimativa x_{k-1} por predição;

$$p(x_{k-1} | m_k, y_{1:k-1}) \xrightarrow{\text{Predição do FK}} p(x_k | m_k, y_{1:k-1})$$

iv Corrigir a estimativa x_k por meio da nova medição;

$$p(x_k | m_k, y_{1:k-1}) \xrightarrow{\text{Correção do FK}} p(x_k | m_k, y_{1:k})$$

v Corrigir as probabilidades dos modos por meio da nova medição;

$$\Pr(m_k | y_{1:k-1}) \xrightarrow{\text{Teorema de Bayes}} \Pr(m_k | y_{1:k})$$

As equações envolvidas no cálculo destes cinco passos são mostradas no algoritmo a seguir, existindo uma correspondência numérica entre as etapas descritas acima e os passos do IMM. Também é mostrada uma interpretação gráfica do algoritmo no diagrama da Figura 2.2. O filtro HDFF apresentado na Seção 4.3.1 acrescenta às etapas do IMM um passo que estima a MPT a partir das verossimilhança das medições $y_{1:k}$. No caso do IMM, assume-se que exista conhecimento prévio acerca de Π , tornando-a um parâmetro de ajuste.

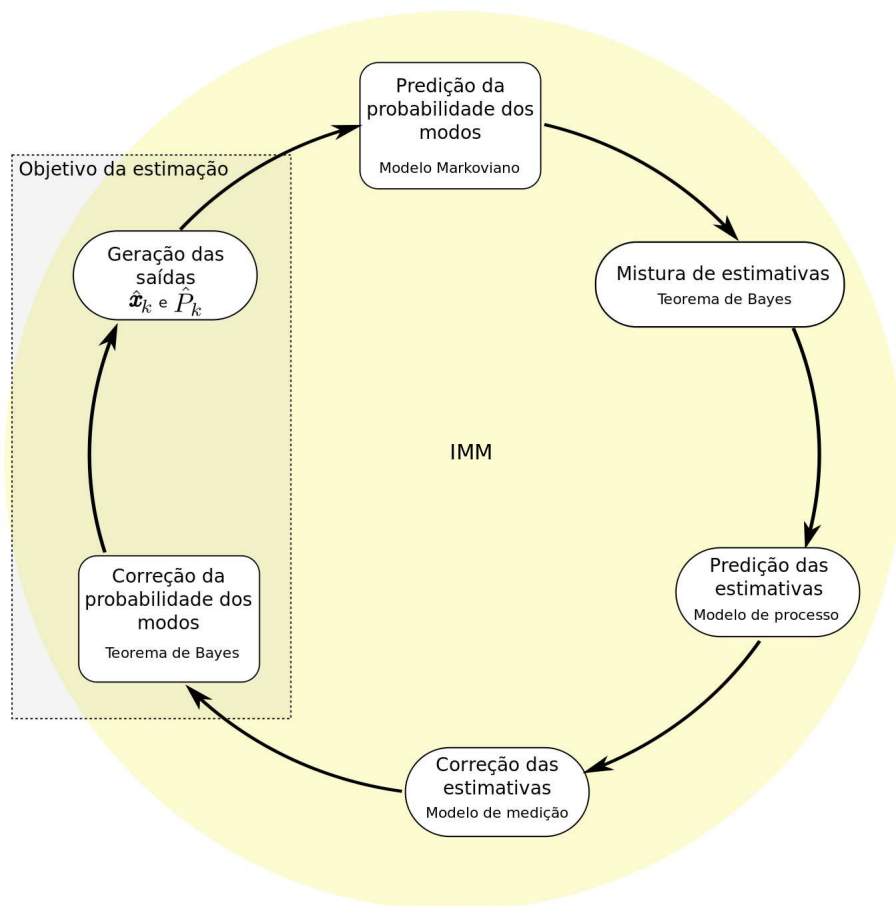


Figura 2.2: Diagrama do algoritmo do filtro IMM.

IMM (*Interacting Multiple Models*) [12]

Sejam $\hat{x}_k^{(i)}$ e $\hat{P}_k^{(i)}$, $i \in \{1, 2, \dots, M\}$, o vetor de estados e sua matriz de covariâncias associada correspondendo ao filtro seguindo o modo $m_k = i$ no k -ésimo instante amostral.

Seja também y_k o vetor atual de saída do sistema. Definindo $\hat{p}^{(i)}(m_k) = \Pr(m_k = i | y_{1:k})$ e assumindo condições iniciais

$$\hat{p}^{(i)}(m_0), \hat{x}_0^{(i)}, \hat{P}_0^{(i)}, i \in \{1, 2, \dots, M\},$$

um conjunto de M filtros é usado para estimar (2.1)-(2.2), cada um deles seguindo um modo diferente do sistema, de acordo com o seguinte algoritmo:

i Predição das probabilidades dos modos

$$\bar{p}^{(i)}(m_k) = \sum_{j=1}^M \pi_{j,i} \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}). \quad (2.4)$$

ii Mistura das estimativas

$$\underline{x}_{k-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^M \frac{\pi_{j,i} \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) \hat{x}_{k-1}^{(j)}}{\bar{p}^{(i)}(m_k)}, \quad (2.5)$$

$$\underline{P}_{k-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^M \frac{\pi_{j,i} \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) \left[\hat{P}_{k-1}^{(j)} + \left(\hat{x}_{k-1}^{(j)} - \underline{x}_{k-1}^{(i)} \right) \left(\hat{x}_{k-1}^{(j)} - \underline{x}_{k-1}^{(i)} \right)^T \right]}{\bar{p}^{(i)}(m_k)}. \quad (2.6)$$

iii Predição das estimativas

$$\begin{aligned} \bar{x}_k^{(i)} &= A_{m_{k-1}} \underline{x}_{k-1}^{(i)}, \\ \bar{P}_k^{(i)} &= A_{m_{k-1}} \underline{P}_{k-1}^{(i)} A_{m_{k-1}}^T + B_{m_{k-1}} Q_{m_{k-1}} B_{m_{k-1}}^T. \end{aligned}$$

iv Correção das estimativas²

$$\begin{aligned} K_k^{(i)} &= \bar{P}_k^{(i)} H_{m_k}^T \left(H_{m_k} \bar{P}_k^{(i)} H_{m_k}^T + G_{m_k} R_{m_k} G_{m_k}^T \right)^{-1}, \\ \hat{x}_k^{(i)} &= \bar{x}_k^{(i)} + K_k^{(i)} \left(y_k - H_{m_k} \bar{x}_k^{(i)} \right), \\ \hat{P}_k^{(i)} &= \left(\mathbb{I} - K_k^{(i)} H_{m_k} \right) \bar{P}_k^{(i)} \left(\mathbb{I} - K_k^{(i)} H_{m_k} \right)^T + \left(K_k^{(i)} G_{m_k} \right) R_{m_k} \left(K_k^{(i)} G_{m_k} \right)^T, \end{aligned}$$

em que \mathbb{I} é a matriz identidade de dimensões apropriadas.

v Correção das probabilidades dos modos

For $i=1, 2, \dots, M$

$$\begin{aligned} \vartheta_k^{(i)} &= y_k - H_{m_k} \bar{x}_k^{(i)}, \\ \Sigma_{\vartheta_k^{(i)}} &= H_{m_k} \bar{P}_k^{(i)} H_{m_k}^T + G_{m_k} R_{m_k} G_{m_k}^T, \end{aligned}$$

²A matriz de covariâncias é corrigida segundo a Forma Estabilizada de Joseph [45], evitando a geração de autovalores negativos devido a erros de aproximação numérica.

$$\hat{p}^{(i)}(m_k) = \frac{\bar{p}^{(i)}(m_k)}{c_i \det \left(\Sigma_{\vartheta_k^{(i)}} \right)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \vartheta_k^{(i)T} \left(\Sigma_{\vartheta_k^{(i)}} \right)^{-1} \vartheta_k^{(i)} \right\},$$

end For

$$\gamma_p = \sum_{j=1}^M \hat{p}^{(j)}(m_k),$$

$$\hat{p}(m_k) = [\hat{p}^{(1)}(m_k), \dots, \hat{p}^{(M)}(m_k)]^T \left(\frac{1}{\gamma_p} \right).$$

em que c_i é uma constante de normalização que não precisa ser calculada.

vi Geração das saídas

$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^M \hat{p}^{(i)}(m_k) \hat{x}_k^{(i)},$$

$$\hat{P}_k = \sum_{i=1}^M \hat{p}^{(i)}(m_k) \left[\hat{P}_k^{(i)} + \left(\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k \right) \left(\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k \right)^T \right].$$

2.2.1.3 Vantagens da combinação de estimativas

Dentre as etapas do algoritmo, apenas o passo (ii) é típico do IMM. Uma questão razoável neste momento é indagar a justificativa matemática para a etapa de “mistura” de estimativas descrita por (2.5)-(2.6). O algoritmo GPB1 [15], por exemplo, serve ao mesmo propósito de estimação do IMM e possui exatamente a mesma estrutura, exceto pelo fato de que o GPB1 substitui (2.5) e (2.6) por

$$\underline{x}_{k-1}^{(i)} = \hat{x}_{k-1}, \quad (2.7)$$

$$\underline{P}_{k-1}^{(i)} = \hat{P}_{k-1}, \quad (2.8)$$

ou seja, as condições iniciais $(\underline{x}_{k-1}^{(i)}, \underline{P}_{k-1}^{(i)})$ para o filtro rastreando o modo $m_k = i$ no instante atual são exatamente as saídas do estimador $(\hat{x}_{k-1}, \hat{P}_{k-1})$ do passo anterior, não havendo mistura alguma. Deve-se notar, no entanto, que (2.7)-(2.8) são um caso particular de (2.4)-(2.6) em que se assume que $\pi_{i,j} = 1/M, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$, i.e., a situação em que os modos da CM seguida por m_k são mutuamente independentes [12]. Para vê-lo, considere $\pi_{i,j} = 1/M$ em (2.4)-(2.6), chegando-se a

$$\bar{p}^{(i)}(m_k) = \sum_{j=1}^M \frac{1}{M} \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) = \frac{1}{M} \underbrace{\sum_{j=1}^M \hat{p}^{(j)}(m_{k-1})}_1 = \frac{1}{M},$$

$$\underline{x}_{k-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^M \frac{1/M}{1/M} \hat{x}_{k-1}^{(j)} = \hat{x}_{k-1},$$

$$\underline{P}_{k-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^M \frac{1/M}{1/M} \left[\hat{P}_{k-1}^{(j)} + \left(\hat{x}_{k-1}^{(j)} - \hat{x}_{k-1} \right) \left(\hat{x}_{k-1}^{(j)} - \hat{x}_{k-1} \right)^T \right] = \hat{P}_{k-1}.$$

Uma vez que a independência mútua entre os modos de uma CM é raramente verdade, conclui-se que a redução do IMM para o GPB1 claramente leva a uma significativa perda de desempenho. Para que se possa compreender os detalhes matemáticos relacionados à “mistura” de estimativas do IMM, analisa-se a f.d.p.

$$p(x_{k-1}|m_k=i, y_{1:k-1}). \quad (2.9)$$

Dado que o conjunto universo $\mathbb{M} \triangleq \{1, 2, \dots, M\}$ de modos do sistema é totalmente disjunto (não há regiões de intersecção entre os modos), o Teorema da Probabilidade Total [46] permite que se escreva (2.9) na forma

$$p(x_{k-1}|m_k=i, y_{1:k-1}) = \sum_{j=1}^M [p(x_{k-1}|m_{k-1}=j, m_k=i, y_{1:k-1}) \Pr(m_{k-1}=j|m_k=i, y_{1:k-1})]. \quad (2.10)$$

Como x_{k-1} é independente de m_k se m_{k-1} é dado, tem-se a equivalência

$$p(x_{k-1}|m_{k-1}=j, m_k=i, y_{1:k-1}) = p(x_{k-1}|m_{k-1}=j, y_{1:k-1}). \quad (2.11)$$

Pelo Teorema de Bayes,

$$\begin{aligned} \Pr(m_{k-1}=j|m_k=i, y_{1:k-1}) &= \frac{\Pr(m_k=i|m_{k-1}=j, y_{1:k-1}) \Pr(m_{k-1}=j|y_{1:k-1})}{\Pr(m_k=i|y_{1:k-1})}, \\ &= \pi_{j,i} \frac{\Pr(m_{k-1}=j|y_{1:k-1})}{\Pr(m_k=i|y_{1:k-1})}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

em que $\Pr(m_k=i|m_{k-1}=j, y_{1:k-1}) = \Pr(m_k=i|m_{k-1}=j) = \pi_{j,i}$ é o mesmo que em (2.3).

Substituindo (2.11) e (2.12) em (2.10), chega-se a

$$p(x_{k-1}|m_k=i, y_{1:k-1}) = \sum_{j=1}^M \pi_{j,i} \Pr(m_{k-1}=j|y_{1:k-1}) \frac{p(x_{k-1}|m_{k-1}=j, y_{1:k-1})}{\Pr(m_k=i|y_{1:k-1})}. \quad (2.13)$$

Reescrevendo (2.13), tem-se

$$p(x_{k-1}|m_k=i, y_{1:k-1}) = \sum_{j=1}^M \beta^{(j)} p(x_{k-1}|m_{k-1}=j, y_{1:k-1}), \quad (2.14)$$

em que $\beta^{(j)}$ concentra todos os termos que não dependem do vetor de estados contínuos. De acordo com [12], mesmo se $p(x_0)$ for Gaussiana, $p(x_{k-1}|m_{k-1}=j, y_{1:k-1})$ é, em geral, uma soma de M^{k-1} Gaussianas ponderadas. Esta soma é fruto do desconhecimento a respeito das transições entre os modos do sistema, gerando uma árvore de possíveis seqüências de modos como aquela mostrada na Figura 2.3. Uma análise mais formal e aprofundada a este respeito é feita nas Seções 4.2.1 e 4.4.

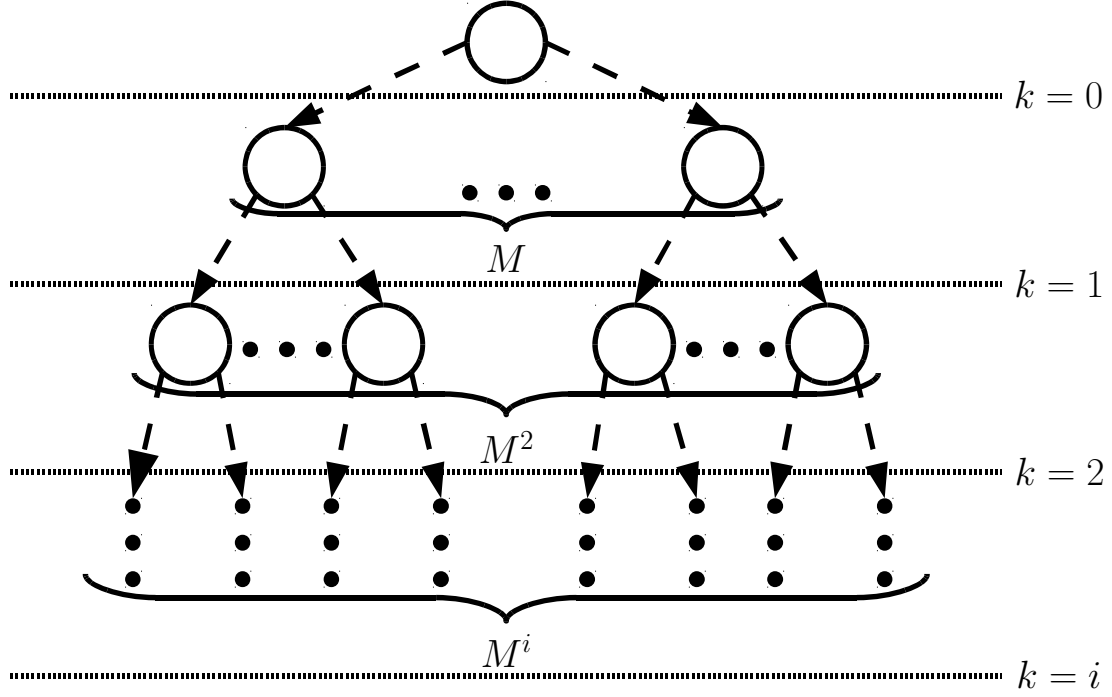


Figura 2.3: Crescimento exponencial do número de modos possíveis em uma CM com transições desconhecidas.

À medida em que o número de iterações aumenta, o custo computacional de processamento de (2.14) torna-se proibitivo e inviabiliza uma abordagem de estimação ótima, visto que seriam necessários filtros associados a cada um dos possíveis históricos de modos [12, 15, 39, 42]. Para resolver este impasse, [12] introduz a aproximação

$$p(x_{k-1}|m_{k-1}=j, y_{1:k-1}) \sim N(\hat{x}_{k-1}^{(j)}, \hat{P}_{k-1}^{(j)}). \quad (2.15)$$

Substituindo (2.15) em (2.13), definindo a variável aleatória contínua

$$W = \{x_{k-1}|m_k=i, y_{1:k-1}\}$$

apenas por motivos de conveniência de notação e sabendo que $E\{\cdot\}$ é o valor esperado do argumento, tem-se

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k-1}^{(i)} &= E\{W\} = \int x_{k-1} p(x_{k-1}|m_k=i, y_{1:k-1}) dx_{k-1}, \\ &= \int x_{k-1} \left(\sum_{j=1}^M \pi_{j,i} \Pr(m_{k-1}=j|y_{1:k-1}) \frac{p(x_{k-1}|m_{k-1}=j, y_{1:k-1})}{\Pr(m_k=i|y_{1:k-1})} \right) dx_{k-1}, \\ &= \sum_{j=1}^M \pi_{j,i} \underbrace{\Pr(m_{k-1}=j|y_{1:k-1})}_{\hat{p}^{(j)}(m_{k-1})} \frac{\overbrace{\int x_{k-1} p(x_{k-1}|m_{k-1}=j, y_{1:k-1}) dx_{k-1}}^{\hat{x}_{k-1}^{(j)}}}{\underbrace{\Pr(m_k=i|y_{1:k-1})}_{\bar{p}^{(i)}(m_k)}}, \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^M \frac{\pi_{j,i} \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) \hat{x}_{k-1}^{(j)}}{\bar{p}^{(i)}(m_k)} \rightarrow (2.5),$$

$$\begin{aligned} \underline{P}_{k-1}^{(i)} &= E \{ (W - E\{W\})(W - E\{W\})^T \}, \\ &= E \{ WW^T - WE\{W\}^T - E\{W\}W^T + E\{W\}E\{W\}^T \}, \\ &= E \{ WW^T \} - E \{ WE\{W\}^T \} - E \{ E\{W\}W^T \} + E \{ E\{W\}E\{W\}^T \}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para cada um dos termos em (2.16), tem-se

$$\begin{aligned} E \{ WW^T \} &= \sum_{j=1}^M \pi_{j,i} \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) \frac{\int x_{k-1} (x_{k-1})^T p(x_{k-1}|m_{k-1}=j, y_{1:k-1}) dx_{k-1}}{\bar{p}^{(i)}(m_k)}, \\ &= \sum_{j=1}^M \pi_{j,i} \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) \frac{\hat{P}_{k-1}^{(j)} + \hat{x}_{k-1}^{(j)} \left(\hat{x}_{k-1}^{(j)} \right)^T}{\bar{p}^{(i)}(m_k)}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} E \{ WE\{W\}^T \} &= \sum_{j=1}^M \pi_{j,i} \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) \frac{\left(\int x_{k-1} p(x_{k-1}|m_{k-1}=j, y_{1:k-1}) dx_{k-1} \right) \left(\underline{x}_{k-1}^{(i)} \right)^T}{\bar{p}^{(i)}(m_k)}, \\ &= \sum_{j=1}^M \pi_{j,i} \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) \frac{\hat{x}_{k-1}^{(j)} \left(\underline{x}_{k-1}^{(i)} \right)^T}{\bar{p}^{(i)}(m_k)}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} E \{ E\{W\}W^T \} &= \sum_{j=1}^M \pi_{j,i} \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) \frac{\left(\underline{x}_{k-1}^{(i)} \right) \left(\int (x_{k-1})^T p(x_{k-1}|m_{k-1}=j, y_{1:k-1}) dx_{k-1} \right)}{\bar{p}^{(i)}(m_k)}, \\ &= \sum_{j=1}^M \pi_{j,i} \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) \frac{\underline{x}_{k-1}^{(i)} \left(\hat{x}_{k-1}^{(j)} \right)^T}{\bar{p}^{(i)}(m_k)}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} E \{ E\{W\}E\{W\}^T \} &= \sum_{j=1}^M \pi_{j,i} \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) \frac{\underline{x}_{k-1}^{(i)} \left(\underline{x}_{k-1}^{(i)} \right)^T \left(\overbrace{\int p(x_{k-1}|m_{k-1}=j, y_{1:k-1}) dx_{k-1}}^1 \right)}{\bar{p}^{(i)}(m_k)}, \\ &= \sum_{j=1}^M \pi_{j,i} \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) \frac{\underline{x}_{k-1}^{(i)} \left(\underline{x}_{k-1}^{(i)} \right)^T}{\bar{p}^{(i)}(m_k)}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Substituindo (2.17)-(2.20) em (2.16), tem-se

$$\underline{P}_{k-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^M \frac{\pi_{j,i} \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) \left[\hat{P}_{k-1}^{(j)} + \left(\hat{x}_{k-1}^{(j)} - \underline{x}_{k-1}^{(i)} \right) \left(\hat{x}_{k-1}^{(j)} - \underline{x}_{k-1}^{(i)} \right)^T \right]}{\bar{p}^{(i)}(m_k)} \rightarrow (2.6).$$

Por fim, [12] introduz a aproximação

$$p(x_{k-1}|m_k=i, y_{1:k-1}) \sim N(\underline{x}_{k-1}^{(i)}, \underline{P}_{k-1}^{(i)}),$$

que fecha o ciclo dos passos do IMM.

2.2.2 O Filtro *Multiple Model Multiple Hypothesis* (M³H)

O filtro M³H proposto em [20] adota uma estratégia de gerenciamento das múltiplas seqüências de modos possíveis do sistema - ou também chamadas hipóteses, conceito novamente abordado na Seção 4.2.1 - diferente daquela do IMM ou dos algoritmos do Capítulo 4. No lugar de um passo de mistura de estimativas como os descritos nas Seções 2.2.1.3 e 4.4, o M³H funde hipóteses com o mesmo histórico de modos nos últimos d passos, assim como mostrado na Figura 2.4. Esta figura ilustra o caso em que $M = 2$ e existem apenas os modos branco (0) e preto (1). A profundidade de fusão mostrada é $d = 2$, ou seja, considera-se para cada hipóteses no instante atual k a seqüência de modos que levou a ela desde o instante $k - 2$. Os dígitos abaixo de cada hipótese no instante atual representam a sua seqüência de modos do instante k até $k - d$. Note que hipóteses identificadas com os mesmos dígitos são aquelas que devem ser fundidas. O termo d será doravante referido como a profundidade de fusão de hipóteses. A estimativa do vetor de estados e a matriz de covariâncias que emergem desta fusão são aquelas que correspondem à hipótese fundida de maior verossimilhança. Por se tratar de um trabalho recente e que se apresenta como uma excelente alternativa ao notório e amplamente adotado IMM, o M³H foi um dos algoritmos avaliados na análise comparativa de desempenho do Capítulo 5. Além disso, muitas inovações trazidas por este filtro influenciaram o desenvolvimento dos algoritmos propostos no Capítulo 4.

2.2.2.1 Formulação do problema

Diferentemente do IMM, inicialmente proposto para realizar a estimação de estados de MJLS na forma (2.1)-(2.2), o M³H considera sistemas híbridos com saltos Markovianos não-lineares perturbados por ruído Gaussiano aditivo

$$x_k = f_{m_{k-1}}(x_{k-1}, t_{k-1}) + g_{m_{k-1}}(x_{k-1}, t_{k-1})w_{k-1, m_{k-1}}, \quad (2.21)$$

$$y_k = h_{m_k}(x_k, t_k) + v_{k, m_k}, \quad (2.22)$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados contínuos; $m_k \in \mathbb{M} \triangleq \{1, 2, \dots, M\}$ é o estado discreto do sistema e segue uma CM definida assim como em (2.3); $f_{m_{k-1}} : \mathbb{R}^{n_x+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é uma função de evolução do processo possivelmente não-linear e dependente do modo; $g_{m_{k-1}} : \mathbb{R}^{n_x+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_w}$ é uma função possivelmente não-linear que modifica o ruído de processo; $h_{m_k} : \mathbb{R}^{n_x+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ e $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ são, respectivamente, a função de medição e o

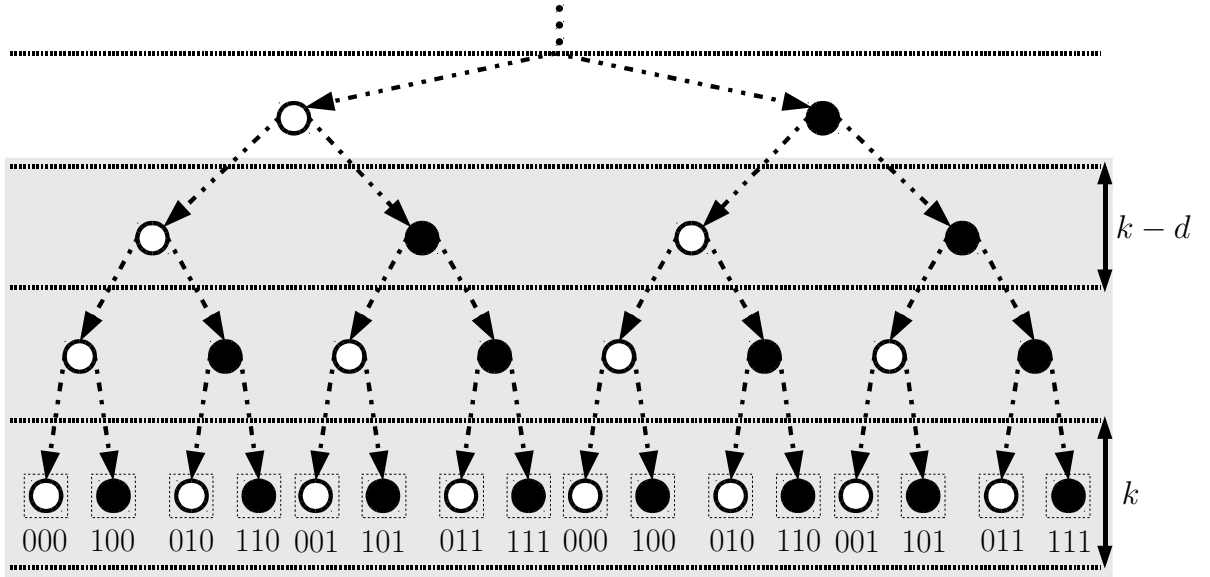


Figura 2.4: Evolução do histórico de modos das hipóteses em um sistema com apenas dois modos: branco (0) e preto (1). Os dígitos abaixo de cada hipótese no instante k representam a sua seqüência de modos até o instante $k - d$. Hipóteses identificadas com os mesmos dígitos são aquelas que devem ser fundidas.

vetor de medições; e $v_{k,m_k} \in \mathbb{R}^{n_v}$, $v_{k,m_k} \sim N(0, R_{k,m_k})$, e $w_{k-1,m_{k-1}} \in \mathbb{R}^{n_w}$, $w_{k-1,m_{k-1}} \sim N(0, Q_{k,m_{k-1}})$, são processos de ruído Gaussiano dependentes do modo.

2.2.2.2 Algoritmo

A idéia básica deste filtro é que uma quantidade variável de hipóteses a respeito do histórico dos modos do sistema é propagada ao longo do tempo. O número de hipóteses propagadas não é fixo, mas sim dependente da situação e das saídas do sistema. A lógica por trás disso é que em situações “difíceis”, i.e., casos em que um número considerável de hipóteses têm probabilidades relativamente altas, a quantidade delas aumenta. Por outro lado, durante situações “fáceis”, em que apenas uma ou poucas hipóteses têm alta probabilidade, o número delas decresce. Esta é uma diferença crucial em relação ao IMM, que conserva um número fixo de hipóteses ao longo do tempo independentemente da ocasião. Além disso, o M³H tem a capacidade de lidar com uma profundidade d de fusão de hipóteses variável, enquanto o IMM enquadra-se no grupo de algoritmos de profundidade de fusão fixa [12].

Alguns parâmetros devem ser escolhidos previamente no algoritmo do M³H. Estes são o limiar de eliminação de hipóteses, ϵ , que define um limite mínimo de probabilidade abaixo do qual hipóteses são descartadas; a profundidade de fusão de hipóteses d , que pode ser encarada como o número de passos do filtro até que uma nova fusão de hipóteses seja realizada; e l^{max} , o número máximo de hipóteses consideradas pelo filtro em cada instante de tempo. Os autores em [20] ressaltam que estes parâmetros devem ser cuidadosamente escolhidos pelo usuário e métodos que automatizam este processo parcialmente podem ser encontrados

em [47]. Em razão do M³H permitir funções não-lineares em (2.21)-(2.22), suas etapas de predição e correção de estimativas são feitas por meio das equações do FKE, que podem ser encontradas no Apêndice A. Uma interpretação gráfica de seu algoritmo pode ser encontrada no diagrama da Figura 2.5.

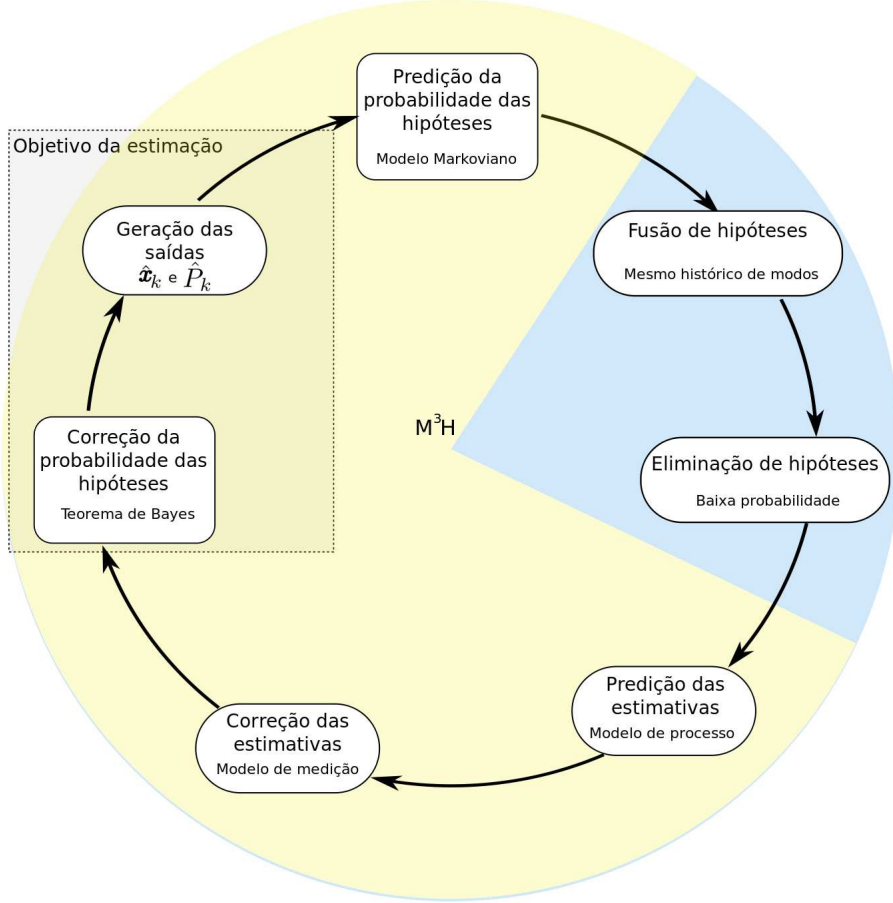


Figura 2.5: Diagrama do algoritmo do filtro M³H.

M³H (Multiple Model Multiple Hypothesis) [20]

Sejam $\hat{x}_k^{(i)}$ e $\hat{P}_k^{(i)}$ o vetor de estado e sua matriz de covariâncias associada correspondendo ao filtro rastreando a hipóteses $I_k^{(i)} \in \mathcal{I}_k$ do sistema no k -ésimo instante amostral, em que \mathcal{I}_k é o conjunto de todas as possíveis hipóteses e d é a profundidade de fusão de hipóteses. Além disso, denote por $n(\mathcal{I}_k)$ o número total de elementos em \mathcal{I}_k e $m_k^{(i)} \in \mathbb{M}$ como o modo atual para a hipótese $I_k^{(i)}$. Sejam também y_k o vetor atual de saída do sistema, $0 \leq \varepsilon < 1$ o limiar de eliminação de hipóteses e l^{max} o número máximo de hipóteses mantidas pelo filtro a cada passo. Definindo $\hat{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k) = \Pr(I_k^{(i)} | y_{1:k})$ e assumindo condições iniciais

$$\hat{p}^{(i)}(\mathcal{I}_0), \hat{x}_0^{(i)}, \hat{P}_0^{(i)}, i \in \{1, 2, \dots, M\},$$

o M³H é dado pelos seguintes passos:

i Predição das probabilidades das hipóteses

$$\bar{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k) = (\hat{\pi}_{a,b}) \hat{p}^{(j)}(\mathcal{I}_{k-1}), a = m_{k-1}^{(j)}, b = m_k^{(i)}, i \in \{1, \dots, n(\mathcal{I}_k)\}, j \in \{1, \dots, n(\mathcal{I}_{k-1})\},$$

em que a nova hipótese $I_k^{(i)}$ é gerada a partir de $I_{k-1}^{(j)}$ e herda as condições iniciais

$$\begin{aligned}\underline{x}_k^{(i)} &= \hat{x}_{k-1}^{(j)}, \\ \underline{P}_k^{(i)} &= \hat{P}_{k-1}^{(j)}.\end{aligned}$$

ii Fusão de hipóteses³

Se $\{I_k^{(n)}, I_k^{(n+1)}, \dots, I_k^{(m)}\}$ é o conjunto de todas as hipóteses com um mesmo histórico de modos (ver Figura 2.4) do instante $(k-d)$ até o instante atual k , defina

$$i_{max} = \arg \max_j (\bar{p}^{(j)}(\mathcal{I}_k)), j \in \{n, n+1, \dots, m\},$$

e faça

$$\begin{aligned}\underline{x}_k^{(n)} &= \underline{x}_k^{(i_{max})}, \\ \underline{P}_k^{(n)} &= \underline{P}_k^{(i_{max})}, \\ \bar{p}^{(n)}(\mathcal{I}_k) &:= \sum_{l=n}^m \bar{p}^{(l)}(\mathcal{I}_k),\end{aligned}$$

mantendo apenas a hipótese $I_k^{(n)}$ e fazendo $n(\mathcal{I}_k) := n(\mathcal{I}_k) - (m - n)$. O sinal de atribuição := modifica o termo à esquerda apenas após a realização das operações à direita.

Repita este procedimento até que todas as hipóteses com o mesmo histórico de modos tenham sido fundidas.

iii Eliminação de hipóteses

Elimine hipóteses $I_k^{(i)}$ com

$$\frac{\bar{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k)}{\sum_{j=1}^{n(\mathcal{I}_k)} \bar{p}^{(j)}(\mathcal{I}_k)} \leq \varepsilon,$$

Se, ao final, $n(\mathcal{I}_k) > l^{max}$, elimine as hipóteses com as menores probabilidades até que $n(\mathcal{I}_k) = l^{max}$. Normalize as probabilidades $\bar{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k)$ remanescentes e atualize $n(\mathcal{I}_k)$ adequadamente.

iv Predição das estimativas

$$\underbrace{(\underline{x}_k^{(i)}, \underline{P}_k^{(i)})}_{\text{Condições iniciais}} \xrightarrow{\text{Predição do FKE}} \underbrace{(\bar{x}_k^{(i)}, \bar{P}_k^{(i)})}_{\text{Estimativas previstas}}$$

v Correção das probabilidades das hipóteses

For $i=1, 2, \dots, n(\mathcal{I}_k)$

³A seleção das condições iniciais $\underline{x}_k^{(i_{max})}$ e $\underline{P}_k^{(i_{max})}$ correspondentes à hipótese de maior probabilidade não consta no algoritmo descrito em [20], tendo sido esta informação obtida por meio de comunicação direta com os autores.

$$\vartheta_k^{(i)} = y_k - h_{m_k}(\bar{x}_k^{(i)}, t_k), \quad (2.23)$$

$$\Sigma_{\vartheta_k^{(i)}} = \left(\frac{\partial h_{m_k}(x_k, t_k)}{\partial x_k} \bigg|_{\bar{x}_k^{(i)}, t_k} \right) \bar{P}_k^{(i)} \left(\frac{\partial h_{m_k}(x_k, t_k)}{\partial x_k} \bigg|_{\bar{x}_k^{(i)}, t_k} \right)^T + R_{k, m_k}, \quad (2.24)$$

$$\hat{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k) = \frac{\bar{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k)}{c_i \det(\Sigma_{\vartheta_k^{(i)}})^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \vartheta_k^{(i)T} (\Sigma_{\vartheta_k^{(i)}})^{-1} \vartheta_k^{(i)} \right\}, \quad (2.25)$$

end For

$$\gamma_p = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{I}_k)} \hat{p}^{(j)}(\mathcal{I}_k),$$

$$\hat{p}(\mathcal{I}_k) = [\hat{p}^{(1)}(\mathcal{I}_k), \dots, \hat{p}^{(n(\mathcal{I}_k))}(\mathcal{I}_k)]^T \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_p \end{pmatrix}.$$

vi Correção das estimativas

$$\underbrace{(\bar{x}_k^{(i)}, \bar{P}_k^{(i)})}_{\text{Estimativas previstas}} \xrightarrow{\text{Correção do FKE}} \underbrace{(\hat{x}_k^{(i)}, \hat{P}_k^{(i)})}_{\text{Estimativas corrigidas}}$$

vii Geração das saídas

$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^{n(\mathcal{I}_k)} \hat{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k) \hat{x}_k^{(i)},$$

$$\hat{P}_k = \sum_{i=1}^{n(\mathcal{I}_k)} \hat{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k) \left[\hat{P}_k^{(i)} + \left(\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k \right) \left(\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k \right)^T \right].$$

O processo de correção das probabilidades das hipóteses em (2.23)-(2.25) é muito semelhante àquele do IMM. Contudo, por estar-se tratando de funções possivelmente não-lineares em (2.21)-(2.22), a saída predita do sistema em (2.23) é calculada por meio da avaliação da função $h_{m_k}(x_k, t_k)$ na estimativa predita $\bar{x}_k^{(i)}$ obtida no passo *iv*. Além disso, para calcular a incerteza em (2.24) fez-se necessário considerar $\partial h_{m_k}(x_k, t_k) / \partial x_k$, que é a matriz Jacobiana da função de medição, avaliada também na estimativa predita $\bar{x}_k^{(i)}$. Mais detalhes de como é feito o cálculo destas derivadas matriciais são dados no Apêndice A.

2.3 ESTIMAÇÃO DA MATRIZ DE PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO EM UMA CADEIA DE MARKOV

Vários trabalhos, tais como [8, 12, 16, 20, 48], relativos à estimação de estados no contexto de sistemas com saltos Markovianos assumem conhecimento prévio acerca das probabilidades de transição, i.e., Π é um parâmetro dado. Contudo, esta é geralmente uma hipótese

irreal [19]. Escolher um valor *a priori* incorreto para Π pode degradar o desempenho do filtro e levá-lo a fornecer valores pouco precisos para \hat{x}_k e $\hat{p}(I_k)$, tornando a estimação *online* de Π baseada em $y_{1:k}$ um recurso útil e interessante.

O algoritmo apresentado em [49] para realizar a estimação *online* de MPTs desconhecidas e não-estacionárias modela cada linha de Π seguindo uma distribuição *a priori* de Dirichlet e deriva um estimador Bayesiano baseado no fato de que a distribuição de Dirichlet é conjugada à distribuição multinomial. Porém, o estimador em [49] assume que os modos do sistema podem ser perfeitamente observados, o que pode não ser verdade. Para a estimação da MPT, utilizou-se o algoritmo *Quasi-Bayesiano* descrito em [19] usando apenas as medições dos sensores como entradas. Este estimador, que fornece uma aproximação da estimativa de máximo *a posteriori* das probabilidades de transição, foi incorporado a todos os filtros híbridos desenvolvidos neste trabalho.

Algoritmo Quasi-Bayesiano [19]

Seja π_i , $i \in \{1, 2, \dots, M\}$, a i -ésima linha de Π , i.e., $\Pi = [\pi_1^T \ \pi_2^T \ \dots \ \pi_M^T]^T$. Defina

$$\begin{aligned}\mu_i(k) &= \Pr(m_k = i | \hat{\Pi}_{k-1}, y_{1:k-1}), \\ \hat{p}(m_k) &= [\mu_1(k) \ \mu_2(k) \ \dots \ \mu_M(k)]^T, \\ \lambda_i(k) &= p(y_k | m_k = i, \hat{\Pi}_{k-1}, y_{1:k-1}), \\ \Lambda(k) &= [\lambda_1(k) \ \lambda_2(k) \ \dots \ \lambda_M(k)]^T \\ \eta_i(k) &= \frac{\mu_i(k-1)}{\hat{p}(m_{k-1})^T \hat{\Pi}_{k-1} \Lambda(k)}.\end{aligned}$$

Assumindo que $\pi_i(k)$ segue uma distribuição de Dirichlet com parâmetros

$$\alpha_i(k) = [\alpha_{i,1}(k) \ \alpha_{i,2}(k) \ \dots \ \alpha_{i,M}(k)]$$

no k -ésimo instante amostral e tendo como parâmetros *a priori*

$$\begin{aligned}\alpha_i(0) &= [\alpha_{i,1}(0) \ \alpha_{i,2}(0) \ \dots \ \alpha_{i,M}(0)], \\ \gamma_i(0) &= \sum_{j=1}^M \alpha_{i,j}(0), \quad \alpha_{i,j}(0) \geq 0, \\ \hat{\pi}_i(0) &= \frac{1}{\gamma_i(0)} \alpha_i(0),\end{aligned}$$

a MPT $\hat{\Pi}(k)$ pode ser estimada recursivamente como segue:

For $i=1, 2, \dots, M$

For $j=1, 2, \dots, M$

$$\begin{aligned}g_{i,j}(k) &= 1 + \eta_i(k) [\lambda_j(k) - \hat{\pi}_i(k-1)^T \Lambda(k)] \\ \alpha_{i,j}(k) &= \alpha_{i,j}(k-1) + \frac{\alpha_{i,j}(k-1) g_{i,j}(k)}{\sum_{l=1}^M \alpha_{i,l}(k-1) g_{i,l}(k)}\end{aligned}$$

$$\hat{\pi}_{i,j}(k) = \frac{1}{k + \gamma_i(0)} \alpha_{i,j}(k)$$

end For

$$\hat{\pi}_i(k) = [\hat{\pi}_{i,1}(k) \dots \hat{\pi}_{i,M}(k)]$$

end For

$$\hat{\Pi}(k) = [\hat{\pi}_1^T \hat{\pi}_2^T \dots \hat{\pi}_M^T]^T$$

Caso não haja informação *a priori* com relação a Π , pode-se escolher $\alpha_i(0) = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$, resultando em $\hat{\pi}_{i,j}(0) = 1/M$.

3 SISTEMA DE LOCALIZAÇÃO

“Navegar é preciso; viver não é preciso.”

Fernando Pessoa

3.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo discute uma série de questões relativas ao modelamento e implementação de um sistema de localização para robôs móveis que utiliza conjuntamente tecnologia de navegação inercial (INS, do inglês *Inertial Navigation System*) e por satélite (GNSS, do inglês *Global Navigation Satellite System*). Este sistema foi desenvolvido em paralelo à dissertação como parte do antigo Projeto Expansion, hoje Projeto Plena Transmissoras, visando à concepção de um helimodelo autônomo para inspeção robotizada de linhas de transmissão de energia elétrica. Em razão da forte interferência eletromagnética gerada pelas linhas de transmissão e também devido à vibração mecânica do sistema, uma das questões centrais neste projeto é a busca por métodos robustos de determinação da atitude (orientação com relação ao chão) da aeronave, visto que ela depende fortemente das medidas de direção do campo magnético da Terra dados por um magnetômetro embarcado e que são negativamente afetadas pelo ambiente. A contribuição deste trabalho para o projeto foi propor que se modelasse o sistema de localização sujeito a falhas do VANT por meio do paradigma de sistemas híbridos e que se utilizassem os algoritmos do Capítulo 4 para realizar a estimação de estados do sistema.

A partir de sua definição como plataforma experimental para avaliação das abordagens desenvolvidas no Capítulo 4, fez-se necessário estabelecer o equacionamento do modelo matemático do sistema de localização, assunto deste capítulo. É dada atenção especial aos métodos de representação da atitude da aeronave e também às suas formas de extração a partir das medidas dos sensores embarcados, em particular aos métodos de filtragem estocástica envolvendo quatérnios unitários. Devido à escolha do FKE como filtro rastreador dos diferentes modos do sistema (ver Capítulo 2) por motivos que serão apresentados no decorrer deste capítulo, é feita uma análise com respeito à linearização de modelos matemáticos com variáveis de estado condicionadas. Também a este respeito, é feita uma discussão no final do capítulo a respeito de modificações do algoritmo clássico do FKE para torná-lo capaz de lidar com a restrição de norma unitária de quatérnios.

3.2 MOTIVAÇÃO: INSPEÇÃO ROBOTIZADA DE LINHAS DE TRANSMISSÃO

A tarefa de transmissão de energia elétrica, por ser um serviço de caráter essencial, exige que manutenções preventivas frequentes sejam executadas em suas linhas a fim de evitar aci-

dentes e interrupções no seu fornecimento. Para tanto, geralmente a inspeção é realizada de forma visual a partir do solo e, caso uma falha seja constatada, é possível que seja necessária a escalada da torre por um técnico, implicando riscos à sua segurança e dispêndio de recursos materiais e humanos. Algumas empresas oferecem serviços de inspeção usando helicópteros, com os quais imagens aéreas são adquiridas de uma linha para serem analisadas em terra. Com a identificação de possíveis defeitos, uma equipe se desloca até o local para fazer a manutenção. Entretanto, este tipo de serviço é caro e pode colocar em risco a vida dos ocupantes do helicóptero.

A principal motivação para o desenvolvimento deste trabalho partiu do projeto *Protótipo de Sistema Robótico Aéreo para Auxílio à Inspeção de Linhas de Transmissão*, financiado pela empresa Plena Transmissoras e do qual o autor participou durante o primeiro ano de seu período de mestrado. Este projeto é parte de um esforço de desenvolvimento de um protótipo de VANT para auxiliar na tarefa de inspeção de linhas de transmissão de energia em razão das atuais dificuldades em se executar esta tarefa. Este VANT, mostrado na Figura 3.1 com parte de sua instrumentação detalhada, é baseado em um helimodelo comercial Raptor 90 SE, de fabricação da Thunder Tiger CORP., cuja eletrônica serve aos propósitos de navegação, aquisição de imagens, estabilização autônoma e de controle remoto do helimodelo por um operador em terra por meio de uma estação rádio-base (ERB). Na continuação, outro projeto está sendo proposto para realizar adaptações no sistema e ensaios de vôo com vista a obter um protótipo funcional. Esse projeto foi marcado pela idéia de se desenvolver integralmente os sistemas eletrônicos de controle e navegação, em vez de se importar esses sistemas já prontos. Com isso, tem-se um grande ganho com o domínio dessa área de conhecimento, permitindo no futuro reprodução do desenvolvimento a custos mais baixos, manutenção do sistema sem depender de serviços externos com menos suporte e a possibilidade de estender ou adaptar a arquitetura conforme necessidades específicas.

A opção por um veículo aéreo baseado em helicóptero deveu-se às vantagens inerentes a este tipo de plataforma [50]. Devido as suas capacidades VTOL (do inglês, *Vertical Take-Off and Landing*), helimodelos não requerem pistas para operações de pouso e decolagem. São também características positivas a boa capacidade de carga e altas velocidades de cruzeiro (cerca de 80 km/h para o modelo de helicóptero escolhido) para este tipo de aeronave. Ademais, sua arquitetura de asa rotativa permite vôos pairados, algo bastante desejável para tornar possível a verificação detalhada de segmentos específicos das linhas de transmissão.

A utilização desse sistema robótico para inspeção de linhas de transmissão permite a supervisão visual aérea a custos mais baixos e sem colocar em risco vidas humanas. Adicionalmente, a redução dos custos permitiria inspeções mais frequentes, contribuindo para mitigar falhas do sistema de transmissão, acarretando economia com operações de manutenção corretiva e melhorando a qualidade do serviço oferecido.

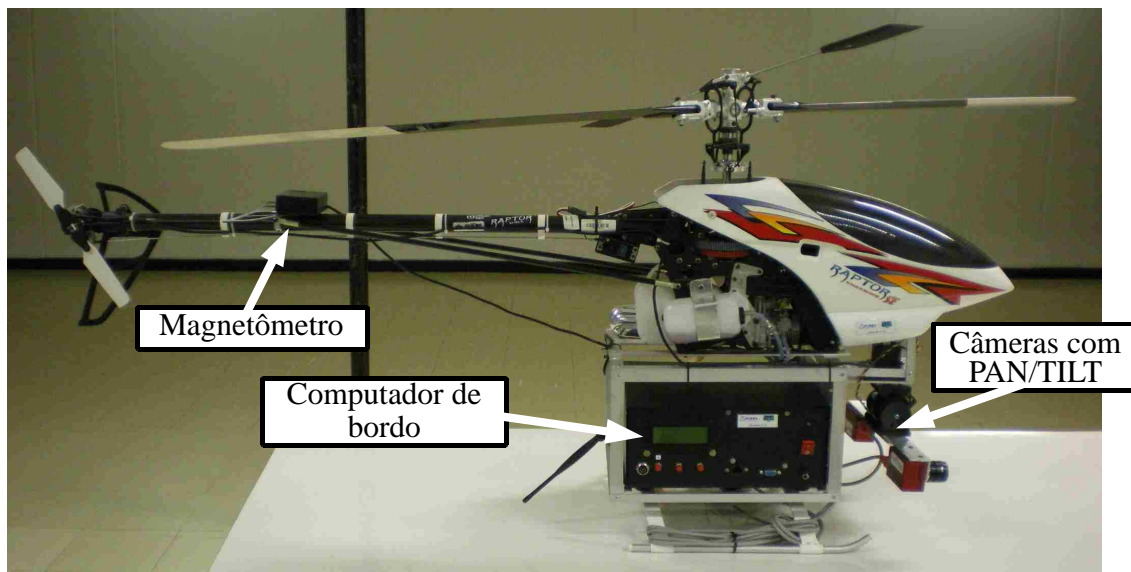


Figura 3.1: Protótipo de VANT para inspeção de linhas de transmissão de energia elétrica.

3.2.1 Instrumentação do VANT

A arquitetura de *hardware* da instrumentação embarcada no VANT é mostrada esquematicamente na Figura 3.2, onde podem ser vistos também os tipos de sinais trocados entre os diferentes elementos. Em linhas gerais, a eletrônica embarcada no protótipo serve aos propósitos de localização 3D, fornecendo dados cinemáticos, dinâmicos e de orientação do sistema em tempo real; atuação sobre os servos para estabilização do helimodelo; interface homem-máquina (IHM), facilitando a interação do usuário com o sistema embarcado; e comunicação remota sem-fio com a ERB em terra. Para minimizar a influência de fontes externas geradoras de interferência eletromagnética, principalmente a perturbação gerada pelas linhas de transmissão, os componentes eletrônicos do computador embarcado foram montados no interior de uma caixa de aço, isolando-os magneticamente.

O principal componente do bloco *Controlador Norte* mostrado na Figura 3.2 é um microcontrolador ARM AT91SAM7 (Atmel [®]) que atua sobre o sistema em dois modos distintos de operação. No modo de controle manual, este microcontrolador recebe sinais de rádio e atua nos servos do helimodelo de acordo com os comandos enviados pelo rádio-controle de um operador em terra, que pode atuar sobre a aeronave sem a interferência do sistema de controle para estabilização. Além de servir como segurança em caso de falha do sistema automático de voo, o modo manual é útil para atuar sobre o sistema durante procedimentos de identificação do modelo matemático do helimodelo [51]. No segundo modo de operação do *Controlador Norte*, o microcontrolador atua sobre os servos do helimodelo de modo a estabilizá-lo em voo e mantê-lo parado de acordo com entradas de controle calculadas pelo computador embarcado PCM-4153 (Advantech [®]). Ao mesmo tempo, o microcontrolador repassa ao computador os sinais de mudança de referência de velocidade enviadas remotamente pelo operador com um *joystick* ligado à ERB, podendo assim movimentar o helicóptero por meio de comandos simples como "vá para frente", "suba" e "desça", eliminando

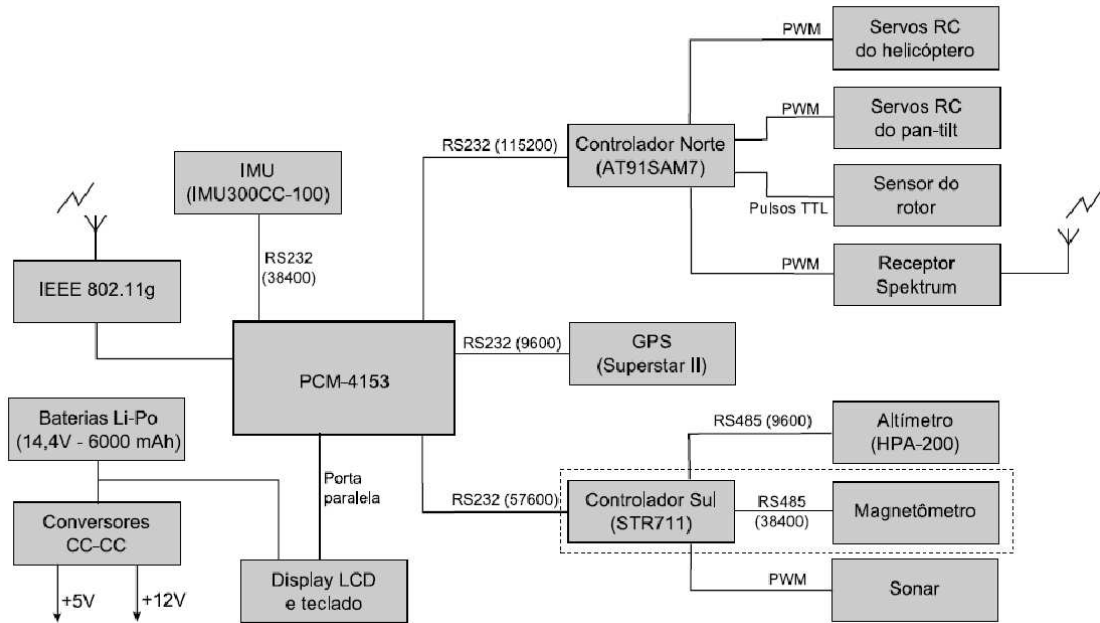


Figura 3.2: Diagrama de blocos da instrumentação do VANT. O sistema de aquisição do magnetômetro é destacado devido à importância de sua análise neste trabalho.

a necessidade de pessoal técnico treinado para operação da aeronave. Por fim, o *Controlador Norte* é responsável por manter constante a velocidade angular do rotor principal do helicóptero e por atuar sobre os servos do sistema PAN/TILT que movimenta as câmeras de inspeção.

O *Controlador Sul* mostrado na Figura 3.2 consiste de um microcontrolador ARM STR711F (ST Electronics ®) ligado a três sensores: um altímetro barométrico HPA200R5DA-B (Honeywell ®), um sonar LV-MaxSonar-EZ1 (MaxBotix ®) e um módulo consistindo de um magnetômetro MicroMag3 (PNI ®) e um microcontrolador ATmega8 (Atmel ®). Diferentemente do *Controlador Norte*, o *Controlador Sul* possui apenas um modo de operação e atua como interface de comunicação e *buffer* de dados entre o computador PCM-4153 e os sensores ligados ao microcontrolador STR711F. Por meio da organização das interrupções de seu *firmware*, o STR711F amostra os sensores ligados a ele de forma a sempre conter as informações mais recentes disponíveis. Estes dados são armazenados temporariamente na memória do microcontrolador que, quando solicitado pelo PCM-4153, os envia por meio de uma interface de comunicação serial. Completam os sensores de localização da aeronave uma Central Inercial (IMU, do inglês *Inertial Measurement Unit*) IMU300CC-100 (Crossbow ®) e um GPS Superstar II (Novatel ®). Fotos de todos os sensores podem ser vistas na Figuras 3.3(a)-3.3(e).

Além das informações sensoriais para localização espacial da aeronave e estabilização de seu vôo, completam a instrumentação do protótipo um módulo de comunicação USB sem-fio de longo alcance KR 5214 (Krazer ®), a IHM do computador de bordo e o sistema



(a) Altimetro HPA 200R5DA-B.



(b) Sonar LV-MaxSonar-EZ1.



(c) IMU IMU300CC-100.



(d) GPS Superstar II.



(e) Módulo contendo o magnetômetro MicroMag3.

Figura 3.3: Instrumentos do VANT.

PAN/TILT de movimentação das câmeras. Este último consiste de um par de servos equipados com engrenagens de titânio que permitem a rotação de um par estéreo de câmeras de alta resolução. O painel frontal do computador de bordo mostrado na Figura 3.1 contém o visor de LCD e a botoeira de interface com o usuário.

3.2.2 Aquisição de dados do magnetômetro

A Figura 3.2 destaca o módulo do magnetômetro na arquitetura de instrumentação do helimodelo. O sensor PNI MicroMag3 realiza as medições de intensidade de campo magnético em cada eixo coordenado e disponibiliza suas medidas por meio de uma interface SPI com 16 *bits* de resolução por eixo. A taxa de amostragem utilizando a melhor resolução é de cerca de 6 Hz.

Para uma melhor estimativa da orientação, os sensores magnéticos não devem ficar próximos de objetos de material ferromagnético. Como tanto o motor do helimodelo, quanto a caixa que contém os componentes, são de aço, o módulo do magnetômetro foi colocado na cauda do VANT, assim como mostrado na Figura 3.1. A placa de circuito mostrada na Figura 3.3(e) contém o microcontrolador ATmega8 que periodicamente adquire as leituras de campo magnético. Nesta comunicação, o ATmega8 atua como mestre, ficando como escravo o módulo MicroMag3. Sempre que solicitado pelo *Controlador Sul* (ARM STR711F), o ATmega8 envia as medidas através de sua porta serial (USART). Procurando tornar a comunicação mais robusta a interferências eletromagnéticas e considerando o grande comprimento do cabo, foi implementado um conversor USART-RS485 para que a comunicação entre o ATmega8 e o *Controlador Sul* pudesse ser feita de forma diferencial. Os dados enviados pelo ATmega8 são encaminhados pelo *Controlador Sul* ao computador embarcado PCM-4153.

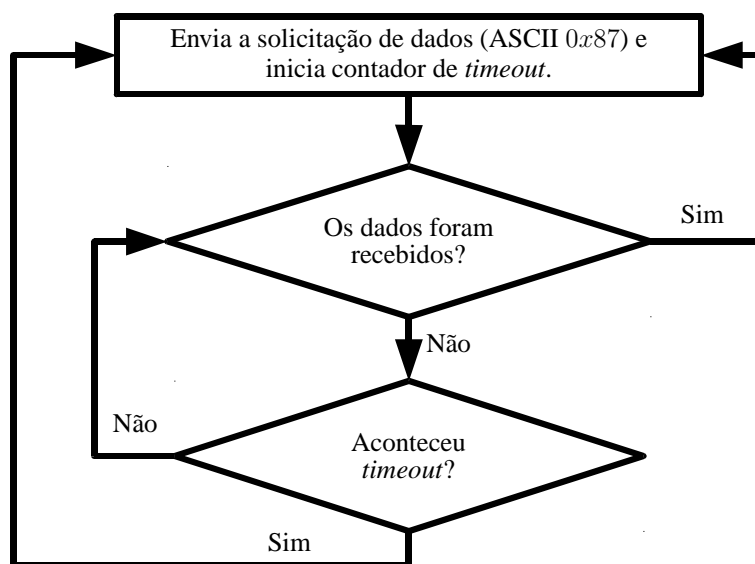


Figura 3.4: Fluxograma do algoritmo de aquisição de dados do magnetômetro pelo *Controlador Sul*.

A aquisição de dados do magnetômetro é ilustrada de forma simplificada pelo fluxograma da Figura 3.4. Nela, o *Controlador Sul* envia um *byte* de solicitação de dados ao ATmega8 da Figura 3.3(e) e inicia um contador. Caso o ATmega8 responda à solicitação de dados dentro do período estipulado, os dados recebidos pelo *Controlador Sul* são armazenados. Caso contrário, uma nova solicitação de dados é enviada ao ATmega8. A utilização de uma interrupção de *timeout* para limitar o tempo máximo de resposta do ATmega8 evita que haja perda definitiva de comunicação entre o *Controlador Sul* e o módulo de bússola, mesmo na ocasião de eventuais problemas na conexão dos componentes ou perdas de pacotes de dados. Contudo, a posição desprotegida do magnetômetro na cauda da aeronave e as fortes vibrações mecânicas do sistema levavam este sensor a apresentar falhas apesar das precauções tomadas para tornar confiável a aquisição de dados. A presença de fontes externas de interferência eletromagnética gerava grandes distúrbios nas medidas, além de leituras inválidas do sensor causadas pela trepidação dos contatos elétricos. De fato, este tipo de sensor apresenta falhas

em suas leituras até mesmo em condições controladas de operação, como pode ser visto nos resultados da Seção 5.3. Uma vez que as estimativas de atitude do VANT dependem fortemente das leituras do magnetômetro, procurou-se modelar estes problemas e propor uma solução baseada no paradigma de modelagem de sistemas híbridos. Esta questão é abordada na Seção 3.5.6 e no desenvolvimento dos algoritmos do Capítulo 4.

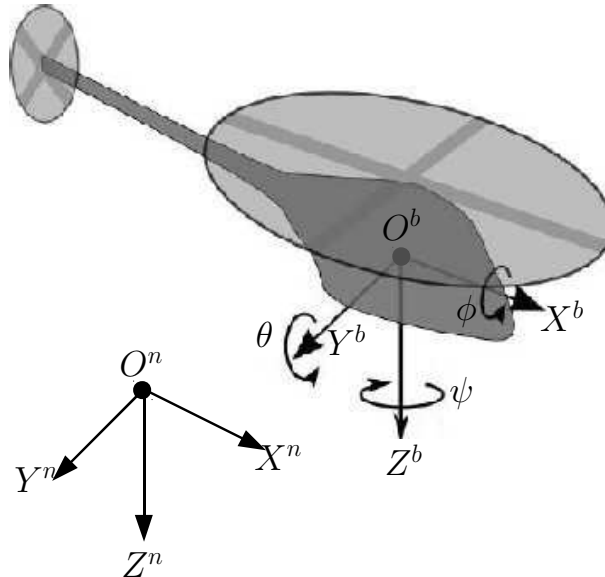


Figura 3.5: Sistemas de coordenadas do corpo (**b**) e de referência (**n**). Os ângulos mostrados são denominados rolagem (ϕ), arfagem (θ) e guinada (ψ).

3.3 REPRESENTAÇÃO DA ATITUDE DO CORPO

Uma questão fundamental no projeto de um sistema de localização é a escolha do método de representação da orientação do corpo em relação a uma pose de referência. Para tanto, consideram-se os sistemas de coordenadas mostrados na Figura 3.5. Nela, o sistema de coordenadas **b** permanece fixamente orientado em relação ao corpo, enquanto que a translação e a atitude da aeronave são medidas com relação ao sistema de referência **n** preso à terra. Ainda que a utilização de um sistema **b** fixo ao corpo seja conveniente na representação das medidas geradas pelos sensores embarcados no VANT, a introdução deste sistema de coordenadas auxiliar cria a necessidade de transformação de vetores ξ^b do sistema do corpo para seus equivalentes ξ^n no sistema de referência. De maneira geral, esta transformação pode ser representada por

$$\xi^n = C_n^b \xi^b = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \xi^b, \quad (3.1)$$

em que C_n^b é chamada de Matriz de Cossenos Diretores (DCM, do inglês *Direction Cosine Matrix*). Em sua discussão a respeito de sistemas de navegação inerciais, [1] elenca três

formas diferentes de representação da atitude de um corpo:

1. **Utilização direta da DCM:** assim como o próprio nome diz, a DCM C_n^b é propagada diretamente a partir das velocidade angulares fornecidas pela IMU embarcada no VANT. As colunas desta matriz 3×3 representam vetores unitários em \mathbf{b} projetados ao longo dos eixos de \mathbf{n} ;
2. **Ângulos de Euler:** a transformação C_n^b de \mathbf{b} para \mathbf{n} é definida a partir de rotações sucessivas em torno dos eixos do sistema de referência \mathbf{n} . Denomina-se por rolagem (ϕ) a defasagem de \mathbf{b} em torno de X^n , arfagem (θ) a defasagem em torno de Y^n e guinada (ψ) a defasagem em torno de Z^n . Definindo as matrizes

$$C_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, C_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix},$$

em que C_ψ , C_θ e C_ϕ são, respectivamente, rotações em torno de Z^n , Y^n e X^n , a DCM em (3.1) pode ser escrita na forma

$$C_n^b = (C_\psi)^T (C_\theta)^T (C_\phi)^T,$$

$$C_n^b = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

em que (3.2) é a parametrização de (3.1) em termos dos Ângulos de Euler;

3. **Quatérnios:** inicialmente propostos por Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) em 1843, quatérnios podem ser usados para parametrizar a orientação de \mathbf{b} com relação a \mathbf{n} por meio da uma única rotação de um ângulo α em torno de um vetor σ unitário definido em \mathbf{n} . O quatérnio q_n^b que leva do sistema do corpo \mathbf{b} ao sistema de referência \mathbf{n} é um vetor de quatro componentes

$$q_n^b = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sigma_x \\ \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sigma_y \\ \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sigma_z \end{bmatrix}, \|\sigma\| = 1, \quad (3.3)$$

em que σ_x , σ_y e σ_z são as componentes de σ descritas em \mathbf{n} e $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana do argumento. O quatérnio q_n^b também pode ser representado na forma de um número hipercomplexo

$$q_n^b = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3, \sum_{i=0}^3 q_i^2 = 1, \quad (3.4)$$

em que valem as identidades $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}$ e $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}$. Se $\xi^b = [\xi_1^b, \xi_2^b, \xi_3^b]^T$ é um vetor genérico descrito no sistema do corpo \mathbf{b} , a sua transformação para o sistema de referência \mathbf{n} pode ser descrita por

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \xi_1^n \\ \xi_2^n \\ \xi_3^n \end{bmatrix} = q_n^b \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_1^b \\ \xi_2^b \\ \xi_3^b \end{bmatrix} (q_n^b)^*, \quad (3.5)$$

em que $(q_n^b)^* = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3]^T$ é o complexo conjugado de q_n^b e o produto em (3.5) é feito segundo a notação em (3.4). A equação relacionando q_n^b a sua respectiva matriz de rotação é

$$C_n^b(q_n^b) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Uma discussão detalhada a respeito de aspectos teóricos e práticos relacionados a quatérnios pode ser encontrada em [52].

Dentre as formas apresentadas, os Ângulos de Euler são talvez a representação de mais fácil entendimento de um ponto de vista físico, uma vez que os três ângulos ϕ , θ e ψ correspondem diretamente a ângulos de rotação do sistema \mathbf{b} em torno de \mathbf{n} . Contudo, esta representação tem duas desvantagens principais. Em primeiro lugar, o cálculo da DCM em (3.2) e sua propagação a partir das medidas da IMU envolve o cálculo de vários senos e cossenos, funções trigonométricas cujas aproximações por séries de potências podem gerar uma carga computacional considerável. Em segundo lugar, a representação por Ângulos de Euler é singular para $\theta = \pm\pi/2$. Quanto à representação por meio da DCM ou quatérnios, [1] afirma que análises comparativas entre os dois métodos têm normalmente gerado resultados inconclusivos, ainda que os quatérnios tenham a vantagem inerente de gerar matrizes de rotação ortogonais. Além disso, é possível projetar-se algoritmos para cálculos de quatérnios e da DCM com desempenho e complexidade computacionais comparáveis. Contudo, a precisão dos cálculos de propagação da atitude usando quatérnios é maior do que a conseguida por meio da DCM, o que justifica a popularidade deste método nos últimos anos. Ainda que esta representação não seja tão intuitiva quanto os Ângulos de Euler, quatérnios não apresentam singularidades na representação da atitude. Além disso, as operações envolvidas no cálculo da DCM a partir de quatérnios envolvem apenas operações matemáticas de soma, subtração e multiplicação, assim como pode ser visto em (3.6).

3.4 EXTRAÇÃO DA ATITUDE A PARTIR DE MEDIDAS VETORIAIS

Psiaki relembra em [53] que são necessários ao menos dois vetores não-colineares medidos nos sistemas de coordenadas do corpo e de referência para extração completa da atitude

tridimensional. Este tipo de informação, geralmente obtida por meio de sensores embarcados, inclui o vetor de direção do Sol, os vetores de campo magnético e campo gravitacional da Terra, os vetores de direção de estrelas brilhantes, a diferença de fase entre ondas portadoras de sinais em sistemas GPS, entre outros. A Figura 3.6 mostra os vetores gravitacional g_E^n e de campo magnético m_E^n que podem ser usados para se estimar a atitude de uma aeronave. Ainda que este fato geométrico possa parecer óbvio ao leitor mais informado, a não observância desta exigência trouxe uma série de dificuldades ao trabalho, justificando aqui uma pequena discussão a este respeito.

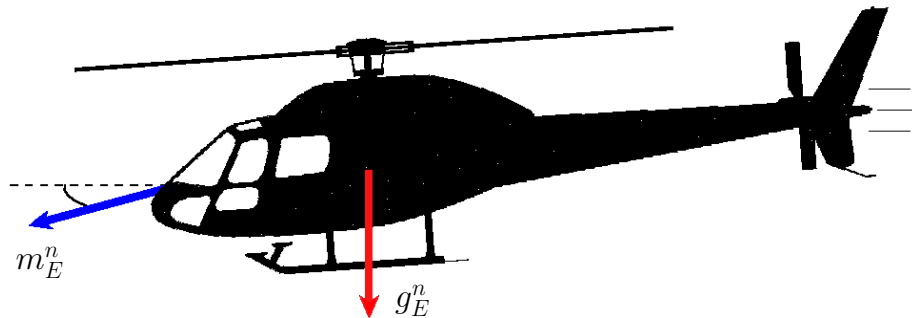


Figura 3.6: Medições vetoriais que podem ser usadas no cálculo da atitude de uma aeronave.

Considere a situação mostrada na Figura 3.7. Dados ξ^b um vetor qualquer medido no referencial do corpo e ξ^n sua representação no sistema de coordenadas de referência, deseja-se encontrar a transformação C_ξ que alinhe os dois vetores. Uma maneira direta de fazê-lo é resolver o sistema de equações

$$\xi^n = C_\xi \xi^b = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{bmatrix} \xi^b$$

considerando as restrições de ortogonalidade da matriz de rotação C_ξ . Todavia, este método exige soluções explícitas para todos os nove elementos de C_ξ , o que claramente representa um desperdício de tempo, visto que uma matriz de rotação possui apenas três graus de liberdade. Uma maneira alternativa de se fazer o mesmo é escrever C_ξ no formato (3.6) e resolver o sistema de equações para as componentes q_0, q_1, q_2 e q_3 do quatérnio com a restrição $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$. Contudo, isto ainda incorre em um sistema não-linear de quatro equações a quatro incógnitas, cuja solução pode não ser trivial.

Uma solução eficiente para este problema de alinhamento tridimensional de vetores foi encontrada ao se considerar a representação de quatérnios na forma (3.3). A idéia por trás do método é um resultado básico da Geometria Euclidiana: duas retas definem um plano. Partindo deste resultado, define-se o eixo de rotação

$$\sigma = \frac{\xi^b \times \xi^n}{\|\xi^b\| \|\xi^n\|}, \quad (3.7)$$

em que \times é o operador de produto vetorial (*cross product*). Por definição, a equação (3.7) define um vetor ortogonal ao plano formado por ξ^b e ξ^n , assim como pode ser visto na Figura

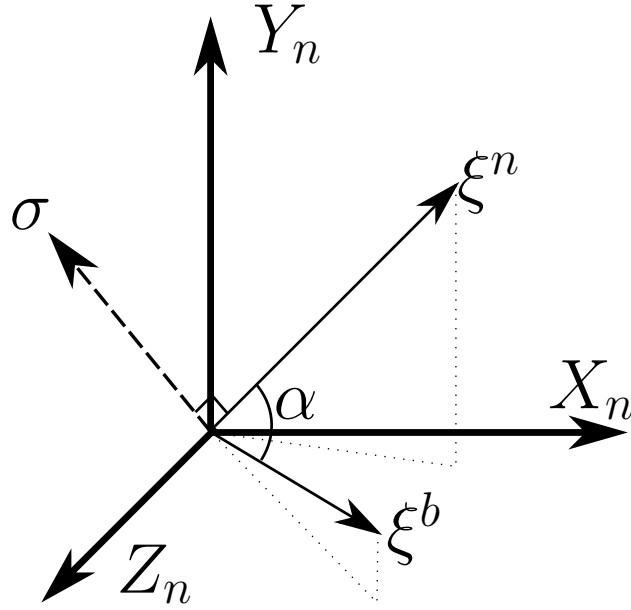


Figura 3.7: Problema de alinhamento de vetores no espaço tridimensional.

3.7. Por se tratar de vetores coplanares, uma rotação em torno de σ de um ângulo α leva ξ^b a ξ^n . De fato, (3.3) mostra que não é necessário calcular α diretamente, bastando que se encontre as grandezas $\cos(\alpha/2)$ e $\sin(\alpha/2)$. Para fazê-lo, parte-se da igualdade

$$\cos(\alpha) = \frac{\xi^b \cdot \xi^n}{\|\xi^b\| \|\xi^n\|}, \quad (3.8)$$

em que \cdot é o operador de produto escalar (*dot product*) entre os dois vetores. Manipulando $\cos(\alpha)$ em (3.8), tem-se

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2, \\ &= 1 - 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2, \\ &= 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}, \quad (3.9)$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}. \quad (3.10)$$

Substituindo (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10) em (3.3), chega-se à matriz C_ξ que alinha ξ^b e ξ^n . Descobriu-se posteriormente que esta forma de cálculo do quatérnio de orientação entre dois vetores já havia sido proposta por [54] e denominada de *quatérnio de rotação mínima*.

A origem dos problemas enfrentados durante o trabalho foi assumir, em um primeiro momento, a igualdade $C_\xi = C_n^b$. O motivo para a incorreção desta igualdade está no fato do método de cálculo para C_ξ anterior não levar em conta rotações do corpo em torno de ξ^b , não

permitindo que se garanta o alinhamento entre os sistemas **b** e **n** após a rotação dos vetores do sistema por C_ξ . Para vê-lo, basta considerar o caso mostrado na Figura 3.8. Apenas para simplificar a análise, considerou-se que $\xi^n \equiv X^n$.

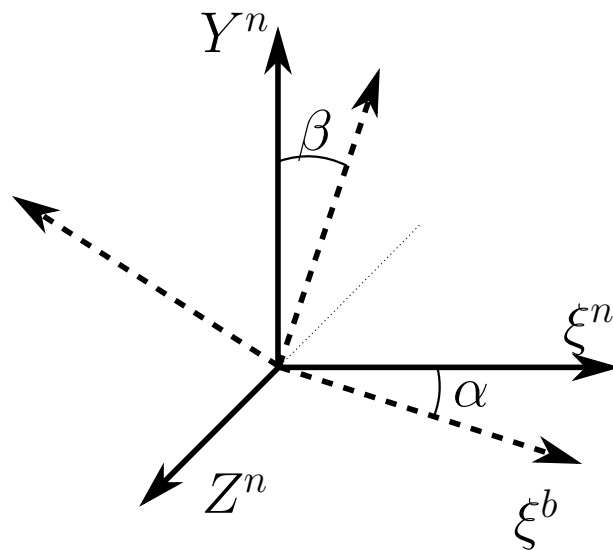


Figura 3.8: Sistemas **b** e **n** defasados de um ângulo β em torno de X^b .

Inicialmente, o sistema de coordenadas **b** gira em torno de Y^n de forma a gerar uma defasagem α entre ξ^n e ξ^b . Em seguida, o corpo gira em torno ξ^b , levando à defasagem adicional β mostrada. A partir do método de cálculo de C_ξ apresentado anteriormente, apenas α seria compensado, visto que é a menor rotação que alinha ξ^n e ξ^b , deixando a defasagem β inalterada. Isto mostra a necessidade de uma segunda medida vetorial não-colinear nos sistemas de referência **b** e **n** para alinhá-los corretamente.

Diversos resultados estão disponíveis na literatura para extração de atitude a partir de medidas de grandezas vetoriais. Em seu Capítulo 3, [52] apresenta um método baseado na intersecção dos lugares geométricos dos eixos de rotação que alinham os eixos de dois sistemas de coordenadas tridimensionais, além de outro baseado nos elementos da DCM para extração do eixo de rotação. Em [53], Psiaki apresenta uma versão estendida do algoritmo QUEST que utiliza este algoritmo determinístico para geração de uma “medida” de atitude (quatérnio) para a etapa de correção de um FKE. Ademais, o autor cita diversos outros trabalhos em que algoritmos geométricos e outros baseados no FKE são utilizados para o mesmo fim. Método semelhante ao de [53] é utilizado em [55], em que o QUEST é substituído pelo TRIAD melhorado (*improved TRIAD*) introduzido por [56]. Lefferts et al. apresentam em [57] uma revisão de 1982 a respeito de métodos baseados em filtragem de Kalman para estimação de quatérnios de orientação para veículos espaciais. Bar-Itzhack e Oshman propõem em [58] dois algoritmos baseados no FKE para estimação recursiva do quatérnio de orientação a partir de medidas vetoriais em dois sistemas de referência. De maneira a obedecer a restrição de norma unitária, a estimativa do quatérnio é normalizada e mostra-se que a matriz de covariâncias da estimativa não é afetada no processo. Uma discussão mais aprofundada a respeito da restrição de norma na estimação de quatérnios é feita na Seção 3.6.

A forma adotada neste trabalho para extração de atitude a partir de medidas dos sensores embarcados é apresentada na Seção 3.5.3.

3.5 MODELAGEM DE UM SISTEMA DE LOCALIZAÇÃO GNSS/INS

Esta seção descreve o modelo matemático usado no sistema de localização do VANT. Um sistema de navegação inercial composto de uma IMU com 6 graus de liberdade mede taxas de variação angulares e lineares por meio de acelerômetros e girômetros. Um magnetômetro de três eixos e um altímetro barométrico são usados, respectivamente, para corrigir a atitude e a altitude da aeronave. Por fim, um sistema de navegação global por satélite provê medidas de posição e velocidade por meio de um receptor GPS. As equações do sistema de localização utilizam como referências os eixos coordenados da Figura 3.5.

3.5.1 Translação

Seja p^b a representação do vetor de posição da IMU no sistema de coordenadas \mathbf{b} fixo no corpo e p^n a representação do mesmo vetor no sistema de coordenadas \mathbf{n} fixo no solo. Considerando que \mathbf{b} translada e rotaciona em relação a \mathbf{n} , tem-se que

$$p^n = C_n^b p^b + t_n^b, \quad (3.11)$$

em que C_n^b denota a matriz de rotação de \mathbf{b} para \mathbf{n} e $t_n^b = O^b - O^n$ é o deslocamento entre as origens de \mathbf{b} (O^b) e \mathbf{n} (O^n). Uma vez que a IMU fornece acelerações em \mathbf{b} , uma transformação é necessária para descrever essas acelerações em \mathbf{n} . Derivando-se (3.11) duas vezes em relação ao tempo, tem-se

$$v^n = \dot{p}^n = \dot{C}_n^b p^b + C_n^b \dot{p}^b + \dot{t}_n^b, \quad (3.12)$$

$$a^n = \dot{v}^n = \ddot{C}_n^b p^b + 2\dot{C}_n^b \dot{p}^b + C_n^b \ddot{p}^b + \ddot{t}_n^b. \quad (3.13)$$

O ponto p^b é fixo na estrutura na maioria dos casos, implicando $\dot{p}^b = \ddot{p}^b = 0$. De forma a tornar (3.11)-(3.13) ainda mais simples, p^b pode ser escolhido coincidindo com O^b e o centro de massa do corpo, fazendo $p^b = 0$. Nestas situações, (3.13) pode ser reescrita como

$$a^n = \ddot{t}_n^b = C_n^b a^b, \quad (3.14)$$

em que $a^b = [a_x^b \ a_y^b \ a_z^b]^T$ é a aceleração medida em \mathbf{b} . Dado que acelerômetros medem forças específicas f^b atuando sobre o corpo no lugar de acelerações reais, (3.14) é mudada para

$$a^n = C_n^b f^b + g_E^n, \quad (3.15)$$

em que f^b corresponde à leitura da IMU e g_E^n representa o campo gravitacional local medido em \mathbf{n} .

Escolhendo $[p^n \ v^n]^T$ como o vetor de estados para representar o movimento de O^b em relação a \mathbf{n} , a translação do corpo pode ser descrita por

$$\begin{bmatrix} \dot{p}^n \\ \dot{v}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^n \\ v^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_n^b & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^b \\ g_E^n \end{bmatrix} + \epsilon_t, \quad (3.16)$$

em que \mathbb{I} denota a matriz identidade de dimensões apropriadas. O termo ϵ_t modela perturbações resultantes de erros de modelagem e ruído dos sensores.

3.5.2 Rotação

Tendo em vista as vantagens apresentadas na Seção 3.3, a atitude do corpo, i.e., a orientação da aeronave com relação ao sistema de coordenadas de referência, é aqui representada por meio de quatérnios. Contudo, existem alternativas mais simples à representação de quatérnios da Seção 3.3. De acordo com [59], o fato de todas as representações de atitude por meio de três parâmetros serem descontínuas para certas orientações (lembre-se, por exemplo, da singularidade em $\theta = \pm\pi/2$ para a representação por meio de Ângulos de Euler) levou à busca por representações de ordem mais alta e sem singularidades, especialmente os quatérnios de quatro componentes. Contudo, trabalhos como [54, 59, 60] parametrizam a atitude do corpo como um vetor de apenas três componentes no desenvolvimento de seus algoritmos de estimação de atitude, reduzindo a quantidade de estados em seus filtros. A idéia por trás destes algoritmos é representar a atitude não como uma defasagem absoluta entre sistemas de coordenadas, mas sim como um erro incremental em torno de uma orientação de referência. Neste caso, o quatérnio de atitude q_n^b é dado pelo produto

$$q_n^b = q_{ref} \delta q(a), \quad (3.17)$$

em que q_{ref} é algum quatérnio unitário de referência e $\delta q(a)$ é o quatérnio unitário representando a defasagem de q_{ref} para a atitude real q_n^b parametrizada pelo vetor a de três componentes. Ainda que muitas escolhas de a sejam possíveis [61], é prática comum escolhê-lo como alguma variante do vetor r_p de parâmetros de Rodrigues (ver referências de [59]), obtido a partir de (3.3) por meio da divisão

$$r_p = \frac{q_n^b}{q_0} = \sigma \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (3.18)$$

Em [59], por exemplo, escolhe-se $a = 2r_p$ de forma a que $\|a\| \approx \alpha$ quando a defasagem angular entre q_n^b e q_{ref} for pequena. Para esta escolha particular de a , a inversão de (3.18) resulta em

$$\delta q(a) = \frac{1}{\sqrt{4 + \|a\|^2}} \begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}$$

para o incremento de atitude $\delta q(a)$. Ainda que seja singular para $\alpha = \pi$, a representação em (3.17) tem a vantagem adicional de garantir a restrição de norma do quatérnio por meio

da multiplicação de termos. Além disso, a singularidade na representação só é atingida se o corpo apresentar orientação oposta ao quatérnio de referência q_{ref} , algo que se espera que seja extremamente raro, senão inexistente, em um aplicação de rastreamento de trajetória. Contudo, a representação (3.17) não foi usada neste trabalho em razão de não se estar tratando de um VANT para seguimento de uma trajetória pré-determinada, mas sim de um veículo de movimentação espacial livre para a correta avaliação de eventuais falhas estruturais nas linhas de transmissão. Não se deve menosprezar, entretanto, a possível utilidade da representação (3.17) em outros projetos de robótica em que haja uma trajetória a ser seguida e onde a limitação da capacidade computacional torne interessante a redução da dimensão do vetor de estados do sistema.

Em vista do anteriormente exposto, seja $q_n^b = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$, $\|q_n^b\| = 1$ o quatérnio que representa a orientação de \mathbf{b} em relação a \mathbf{n} e cuja respectiva matriz de rotação é dada em (3.6). À medida em que o corpo rotaciona, os girômetros da IMU fornecem medidas de velocidade angular ω_x , ω_y e ω_z em torno dos eixos X^b , Y^b e Z^b , respectivamente (Figura 3.5). Logo, a evolução da atitude do corpo pode ser descrita como

$$\dot{q}_n^b = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ -\omega_x & 0 & -\omega_z & \omega_y \\ -\omega_y & \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_z & -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} q_n^b + \epsilon_q = -\frac{1}{2} W q_n^b + \epsilon_q. \quad (3.19)$$

De forma semelhante a (3.16), o termo de perturbação ϵ_q é acrescido para lidar-se com erros de modelagem e ruídos dos sensores.

3.5.3 Discretização do modelo e das medidas dos sensores

Implementar (3.16) em um computador digital requer sua conversão para o domínio do tempo discreto [21]. Denotando τ como o período de amostragem, (3.16) tem representação discreta

$$\begin{bmatrix} p_k^n \\ v_k^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{I}\tau \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{k-1}^n \\ v_{k-1}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{n,k-1}^b \frac{\tau^2}{2} & \mathbb{I} \frac{\tau^2}{2} \\ C_{n,k-1}^b \tau & \mathbb{I}\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{k-1}^b \\ g_E^n \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

em que o subscrito $k \in \mathbb{N}$ denota a amostra tomada no instante de tempo $k\tau$. Seguindo um procedimento semelhante para a conversão de (3.19) para o domínio discreto, temos

$$q_{n,k}^b = \left[\mathbb{I}_{4 \times 4} \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - W\tau \frac{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\delta} \right] q_{n,k-1}^b, \quad (3.21)$$

em que $\delta = \left(\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}\right) \tau$ e W são os mesmos que em (3.19).

O modelo em (3.20)-(3.21) permite ao sistema de localização prever o estado atual do corpo baseado nas leituras da IMU. Todavia, devido a erros de modelagem e ruídos de medição, estimar o estado do sistema usando apenas medidas inerciais rapidamente leva a re-

sultados duvidosos, tornando necessário o uso de sensores adicionais para corrigir as estimativas [62]. Assim como descrito no início desta seção, além da IMU, constam dentre os instrumentos embarcados no VANT um magnetômetro, um receptor GPS e um altímetro barométrico. As leituras destes sensores podem ser descritas por

$$f_k^b = (C_{n,k}^b)^T (a_k^n - g_E^n) + \epsilon_{f,k}, \quad (3.22)$$

$$m_{mag,k}^b = (C_{n,k}^b)^T m_E^n + \epsilon_{m,k}, \quad (3.23)$$

$$p_{gps,k}^n = p_k^n + \epsilon_{p,k}, \quad (3.24)$$

$$v_{gps,k}^n = v_k^n + \epsilon_{v,k}, \quad (3.25)$$

$$h_{alt,k}^n = z_k^n + \epsilon_{h,k}, \quad (3.26)$$

em que (3.22) é obtida a partir de (3.15), onde o termo f_k^b denota a k -ésima amostra de força específica medida pelo acelerômetro no sistema \mathbf{b} , a_k^n é a aceleração do corpo medida no sistema \mathbf{n} e g_E^n denota o campo gravitacional local; $m_{mag,k}^b$ denota a k -ésima leitura no magnetômetro descrita em \mathbf{b} e m_E^n é o vetor de campo magnético local; $C_{n,k}^b$ é a versão discreta de (3.6) usando (3.21); $p_{gps,k}^n$ e $v_{gps,k}^n$ são, respectivamente, as amostras de posição e velocidade lidas do receptor GPS; $h_{alt,k}^n$ é a medição de altitude dada pelo altímetro; e $\epsilon_{i,k}$, $i \in \{f, m, p, v, h\}$, modelam distúrbios nos sensores.

3.5.4 Modelo do sistema de localização e calibração *online* de sensores

Antes de entrar em operação, todos os sensores do sistema de localização passam por um procedimento de calibração de forma a estimar seus vieses (ou *biases*) e fatores de escala, que são então utilizados para corrigir suas leituras. Ainda que útil, este tipo de calibração tem duas desvantagens principais. Em primeiro lugar, técnicas mais precisas de calibração, como aquelas descritas em [1], não podem ser executadas devido à falta de equipamento especializado, especialmente durante missões em campo. Em segundo lugar, os parâmetros destes sensores tendem a ser variantes no tempo. Portanto, assim como mostrado em [63], é desejável e interessante incluir os vieses dos sensores e seus fatores de escala como variáveis de estado e realizar sua estimação *online*.

Sejam $b_{s,k}$ e $c_{s,k}$, respectivamente, o viés e o fator de escala de um sensor genérico cuja saída pode ser descrita como

$$\tilde{y}_{s,k} = c_{s,k} \bar{y}_{s,k} + b_{s,k} + w_{s,k}, \quad (3.27)$$

em que $\bar{y}_{s,k}$ é a medição real e $w_{s,k}$ é um processo de ruído. De forma a que se possa estimar estes parâmetros em um filtro discreto, considere $\hat{b}_{s,k}$ e $\hat{c}_{s,k}$ como o viés e o fator de escala estimados durante o k -ésimo instante amostral. Se não houver nenhuma informação adicional sobre a dinâmica destes parâmetros, pode-se assumir que estes têm evolução dada pelo modelo

$$\hat{b}_{s,k} = \hat{b}_{s,k-1} + w_{b,k},$$

$$\hat{c}_{s,k} = \hat{c}_{s,k-1} + w_{c,k}, \quad (3.28)$$

em que $w_{b,k} \sim N(0, R_{w_b})$ e $w_{c,k} \sim N(0, R_{w_c})$ são variáveis aleatórias Gaussianas de média nula e matrizes de covariância apropriadas. O modelo em (3.27)-(3.28) é especialmente útil para girômetros e acelerômetros, cujos parâmetros de calibração geralmente flutuam de forma significativa. Neste trabalho, os vieses $b_k^a = [b_{x,k}^a, b_{y,k}^a, b_{z,k}^a]^T$ do acelerômetro são incorporados ao vetor de estados dos filtros devido a sua importância na predição do movimento de translação do corpo e correção de sua atitude. É importante frisar que, ao se afirmar que a estimação dos vieses do acelerômetro é importante, não se está dizendo que os vieses de outros sensores têm menor influência. De fato, para o projeto de VANTs que possam operar durante horas, é importantíssimo que a deriva dos parâmetros dos girômetros também seja considerada. Contudo, o enfoque deste trabalho não está no projeto do sistema de localização em si, que está sendo utilizado aqui apenas como uma aplicação prática em robótica móvel para validação dos resultados teóricos desenvolvidos no Capítulo 4. Além disso, a consideração apenas dos vieses do acelerômetro mostrou-se suficiente para a obtenção de boas estimativas de localização com os dados reais disponíveis e a extensão do método para outros sensores é direta, havendo apenas algum esforço algébrico no cálculo das matrizes Jacobianas caso o FKE esteja sendo utilizado. Para maiores detalhes sobre o projeto de sistemas de localização, veja [55, 63] e suas referências.

Considerando o modelo em (3.20)-(3.28), o vetor de estados do sistema no k -ésimo instante amostral é definido como

$$x_k = [(q_{n,k}^b)^T, (p_k^n)^T, (v_k^n)^T, (b_k^a)^T]^T, \quad (3.29)$$

em que $q_{n,k}^b$, p_k^n e v_k^n são os mesmos que em (3.20)-(3.21). A estimação do vetor de vieses b_k^a do acelerômetro tem conseqüências sobre (3.15), (3.16), (3.20) e (3.22). Levando isso em conta e supondo que todos os sensores em (3.22)-(3.26) são perturbados por ruídos Gaussianos de média nula, o modelo matemático final para o sistema de localização é dado por

• Predição

1. Posição e velocidade tridimensionais

$$\begin{bmatrix} p_k^n \\ v_k^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{I}\tau \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{k-1}^n \\ v_{k-1}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{n,k-1}^b \frac{\tau^2}{2} & \mathbb{I} \frac{\tau^2}{2} \\ C_{n,k-1}^b \tau & \mathbb{I}\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{k-1}^b - b_{k-1}^a \\ g_E^n \end{bmatrix} + \epsilon_{t,k},$$

$$\epsilon_{t,k} \sim N(0, R_{\epsilon_{t,k}}), \quad (3.30)$$

2. Atitude

$$q_{n,k}^b = \left[\mathbb{I}_{4 \times 4} \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - W\tau \frac{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\delta} \right] q_{n,k-1}^b + \epsilon_{q,k}, \quad \epsilon_{q,k} \sim N(0, R_{\epsilon_{q,k}}),$$

$$\delta = \left(\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \right) \tau, \quad W = \begin{bmatrix} 0 & \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ -\omega_x & 0 & -\omega_z & \omega_y \\ -\omega_y & \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_z & -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

3. Vieses do acelerômetro

$$b_k^a = b_{k-1}^a + \epsilon_{b,k}, \quad \epsilon_{b,k} \sim N(0, R_{\epsilon_{b,k}}), \quad (3.32)$$

• Correção

1. Posição e velocidade tridimensionais

$$p_{gps,k}^n = p_k^n + \epsilon_{p,k}, \quad \epsilon_{p,k} \sim N(0, R_{\epsilon_{p,k}}), \quad (3.33)$$

$$v_{gps,k}^n = v_k^n + \epsilon_{v,k}, \quad \epsilon_{v,k} \sim N(0, R_{\epsilon_{v,k}}), \quad (3.34)$$

$$h_{alt,k}^n = z_k^n + \epsilon_{h,k}, \quad \epsilon_{h,k} \sim N(0, R_{\epsilon_{h,k}}). \quad (3.35)$$

2. Atitude

$$f_k^b = (C_{n,k}^b)^T (a_k^n - g_E^n) + b_k^a + \epsilon_{f,k}, \quad \epsilon_{f,k} \sim N(0, R_{\epsilon_{f,k}}), \quad (3.36)$$

$$m_{mag,k}^b = (C_{n,k}^b)^T m_E^n + \epsilon_{m,k}, \quad \epsilon_{m,k} \sim N(0, R_{\epsilon_{m,k}}), \quad (3.37)$$

3. Vieses do acelerômetro → feita indiretamente por meio dos termos de correlação da matriz de covariâncias associada a (3.29).

As medidas dos sensores em (3.33)-(3.37) são incorporadas às etapas de predição (3.30)-(3.31) para corrigir as estimativas de estado, evitando o aumento de suas incertezas. A Seção 3.6 discute as maneiras pelas quais as medidas vetoriais de (3.36) e (3.37) são utilizadas em conjunto para prover uma estimativa da DCM $C_{n,k}^b$ do sistema no k -ésimo instante amostral.

3.5.5 Vantagens da correção seqüencial de estimativas

No processo de correção de estimativas em algoritmos baseados em filtragem de Kalman (vide Apêndice A), a maneira usual de lidar-se com medições simultâneas de várias fontes é agrupá-las em um único vetor de saída e processar todas as informações ao mesmo tempo, assim como mostrado na Figura 3.9(a). Contudo, este método pode mostrar-se computacionalmente ineficiente caso a dimensão do vetor de saída fique demasiadamente grande, haja visto que a complexidade computacional das inversões matriciais envolvidas no processo de correção é $\mathcal{O}(n_y^3)$, em que n_y é a dimensão do vetor de medições [64]. Para amenizar este problema, [65] demonstra que os dados dos sensores podem ser processados seqüencialmente caso suas medidas sejam descorrelacionadas. Nesta situação, ilustrada na Figura 3.9(b), a estimativa predita por meio do modelo matemático do sistema é progressivamente

melhorada pelas diferentes informações sensoriais, trocando o problema de inversão de uma matriz de grande dimensão pelo problema de inversão em série de matrizes de ordem menor. A respeito destes dois métodos, uma questão relevante se põe: em quais situações realizar uma série de inversões matriciais de ordem menor é vantajoso em relação a uma única inversão de alta ordem?

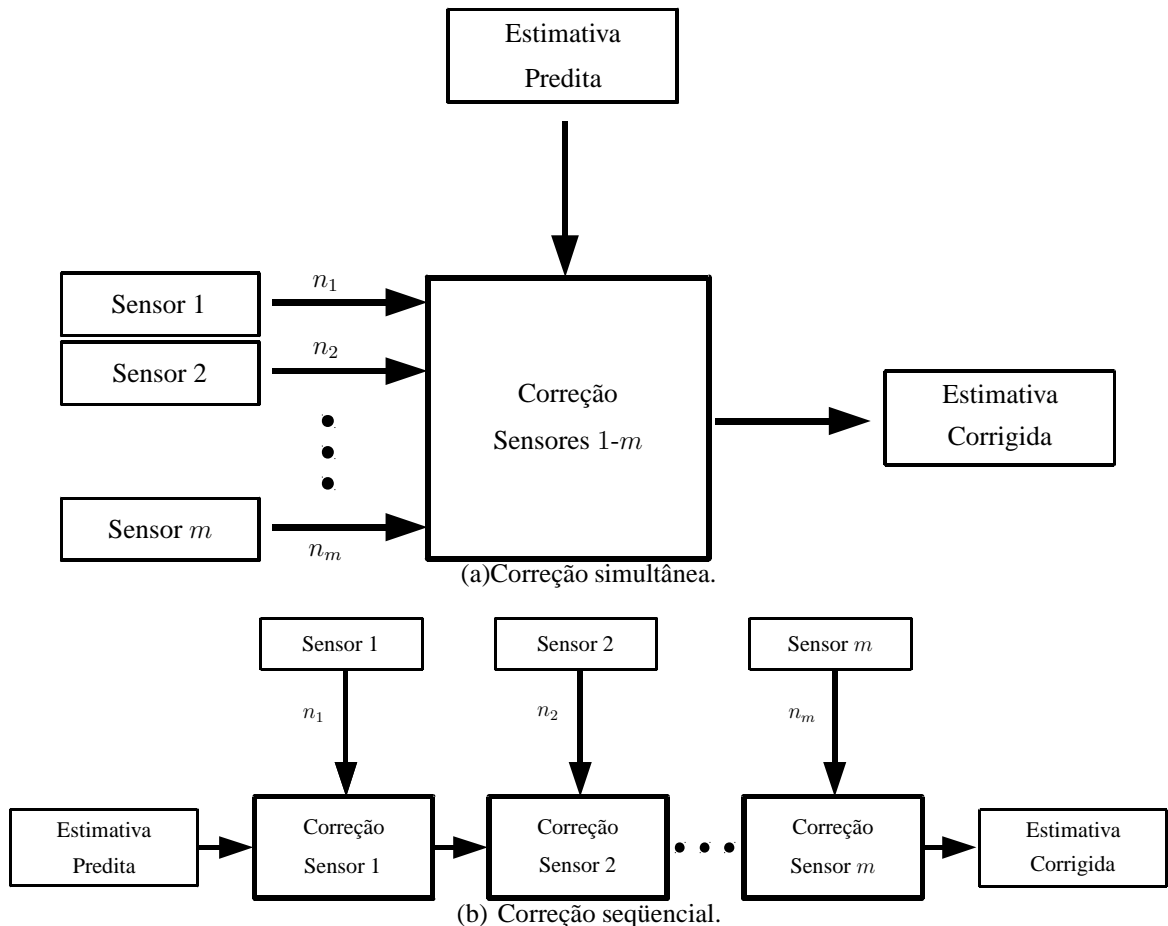


Figura 3.9: Diferentes métodos para correção de estimativas em algoritmos baseados em filtragem de Kalman.

É óbvio que, para o caso em que se trata da medição de apenas um sensor, os dois métodos são idênticos. A análise torna-se mais interessante, porém, quando se considera um conjunto de m diferentes sensores, assim como mostrado na Figura 3.9. Para cada um deles, seja n_i a dimensão do vetor de medida do i -ésimo sensor. Uma vez que a complexidade computacional de inversões matriciais é $\mathcal{O}(n_y^3)$, o método seqüencial será sempre mais vantajoso do que o simultâneo se a desigualdade

$$\left(\sum_{i=1}^m n_i \right)^3 > \sum_{j=1}^m n_j^3. \quad (3.38)$$

for verificada. Entretanto, é fácil ver que a desigualdade (3.38) é satisfeita para quaisquer dimensões dos vetores, uma vez que a soma dos cubos de números naturais sempre está

contida no cubo de sua soma, demonstrando que o método de correção sequencial é sempre vantajoso em relação à correção simultânea em termos de complexidade computacional. Para vê-lo, simplesmente considere o produto notável

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^3 = \sum_{i=1}^n a_i^3 + 3 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n a_i a_j (a_i + a_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^n a_i a_j a_k$$

e veja que à soma dos cubos de todas as parcelas se agrega uma quantidade positiva.

3.5.6 Modelagem de falhas nos sensores

De maneira similar ao que foi feito para o acelerômetro na Seção 3.5.4, provavelmente a maneira mais apropriada de lidar com os vieses do magnetômetro seria incluí-los como variáveis de estado nas equações do filtro e estimá-los *online*. Entretanto, três fatores fizeram com que esta solução não fosse adotada. Em primeiro lugar, os vieses eletromagnéticos induzidos por linhas de transmissão conduzindo corrente alternada podem variar rapidamente (60 Hz é a frequência de oscilação no Brasil), o que dificulta a minimização dos efeitos destas perturbações pelo estimador, visto que, em geral, um número grande de amostras é necessário para que a estimativa de viés convirja para o seu valor real. Em segundo lugar, acrescentar estes vieses às equações dos filtros aumentaria a ordem do sistema e faria a carga computacional aumentar ainda mais, aspecto que pode ser relevante caso um computador embarcado com restrições de processamento e energia esteja sendo utilizado para controlar a aeronave. Por último, desejava-se analisar o desempenho dos filtros híbridos desenvolvidos em situações em que houvesse um grande número de modos do sistema a serem considerados. Portanto, todos os problemas relacionados às medidas do magnetômetro foram modelados como diferentes modos de operação do sistema (ver a Tabela 3.1) e o sistema de localização passou a depender dos métodos de gerenciamento de hipóteses dos filtros para tornar os algoritmos factíveis em tempo real em um computador embarcado.

Baseado nas equações (3.33)-(3.37), que modelam a situação em que todos os sensores operam corretamente e corresponde a $m_k = 1$ na Tabela 3.1, um conjunto de equações de medição dependentes do modo foi usado para modelar a saída do sistema, mais especificamente as leituras do magnetômetro em situações de falha. Ainda que apenas as falhas do magnetômetro sejam consideradas, as técnicas propostas aqui podem ser prontamente estendidas para qualquer tipo de sistema MM e, por conseguinte, os resultados apresentados neste trabalho não representam qualquer tipo de restrição sobre os tipos de sistemas passíveis de análise.

Uma vez que (3.33)-(3.36) não variam entre os modos, apenas as modificações em (3.37) são mostradas. Considerando os modos na Tabela 3.1, falhas no magnetômetro podem ser modeladas como

$$m_{disc,k}^b = 0 + \epsilon_{disc,k}, \quad (3.39)$$

Tabela 3.1: Modos do sistema

Número (m_k)	Descrição ^a
1	Magnetômetro operando normalmente
2	Falha de comunicação entre o magnetômetro e o computador embarcado
3	$X - b_X, Y - b_Y, Z - b_Z$
4	$X + b_X, Y - b_Y, Z - b_Z$
5	$X - b_X, Y + b_Y, Z - b_Z$
6	$X + b_X, Y + b_Y, Z - b_Z$
7	$X - b_X, Y - b_Y, Z + b_Z$
8	$X + b_X, Y - b_Y, Z + b_Z$
9	$X - b_X, Y + b_Y, Z + b_Z$
10	$X + b_X, Y + b_Y, Z + b_Z$

^aConsidere a notação $A + b_A$ e $A - b_A$ para vieses induzidos positivos e negativos, respectivamente, no eixo A .

$$m_{bias,k}^b = (C_{n,k}^b)^T m_E^n + b_{bias,k} + \epsilon_{bias,k}. \quad (3.40)$$

A equação (3.39) corresponde a $m_k = 2$ na Tabela 3.1, enquanto que (3.40) modela medidas viesadas correspondendo aos modos $m_k = 3$ a $m_k = 10$. Um termo 0 (zero) foi explicitamente escrito em (3.39) pois um resistor *pull-down* força medições contendo apenas zeros quando ocorre uma desconexão temporária entre o magnetômetro e o computador embarcado. O termo de viés $b_{bias,k}$ em (3.40) desvia a medida do magnetômetro de seu valor real, atuando de maneira diferente sobre o vetor de medições dependendo do modo do sistema. Os termos de perturbação $\epsilon_{disc,k} \sim N(0, P_{disc})$ e $\epsilon_{bias,k} \sim N(0, P_{bias})$ modelam interferência de sinal gerada pelas linhas aéreas de transmissão de energia elétrica.

3.6 QUATÉRNIOS E FILTRAGEM SOB RESTRIÇÃO

Esta seção apresenta alguns aspectos teóricos e práticos relacionados à estimação do quatérnio de orientação do VANT por meio das medidas vetoriais

$$f_k^b = (C_{n,k}^b)^T (a_k^n - g_E^n) + b_k^a + \epsilon_{f,k}, \quad (3.36)$$

$$m_{mag,k}^b = (C_{n,k}^b)^T m_E^n + \epsilon_{m,k}, \quad (3.37)$$

em que as equações de saída do acelerômetro (3.36) e do magnetômetro (3.37) são repetidas aqui por uma questão de conveniência. Para que seja útil ao propósito de estimação da atitude da aeronave, (3.36) deve corresponder ao vetor do campo gravitacional local medido

no referencial \mathbf{b} . É fácil ver, portanto, que a_k^n , a aceleração atual do corpo no referencial \mathbf{n} , deve ser feita a menor possível, de maneira a que

$$f_k^b - b_k^a \approx (C_{n,k}^b)^T (-g_E^n) + \epsilon_{f,k}. \quad (3.41)$$

As situações *quasi*-estáticas em que a aproximação (3.41) é válida são aquelas em que o VANT encontra-se em vôo pairado ou em movimento retilíneo uniforme (MRU). No entanto, assumir (3.41) também é razoável em vôos não-acrobáticos, i.e., aqueles em que o vetor de velocidade do corpo não muda bruscamente. Contudo, utilizar o vetor de campo gravitacional para extração da atitude torna o sistema de localização sensível a vibrações estruturais (modelada pelo aumento do termo de ruído $\epsilon_{f,k}$) e causa perda de desempenho durante curvas, principalmente as acentuadas. Em ambas (3.36) e (3.37), $C_{n,k}^b$ é a DCM que alinha o sistema de coordenadas \mathbf{b} ao sistema \mathbf{n} .

3.6.1 Representação das medidas dos sensores

As primeiras quatro componentes do vetor de estados (3.29) correspondem ao quatérnio $q_{n,k}^b = [q_{0,k}, q_{1,k}, q_{2,k}, q_{3,k}]^T$ de orientação do VANT. Dada a relação

$$C_{n,k}^b(q_{n,k}^b) = \begin{bmatrix} q_{0,k}^2 + q_{1,k}^2 - q_{2,k}^2 - q_{3,k}^2 & 2(q_{1,k}q_{2,k} - q_{0,k}q_{3,k}) & 2(q_{1,k}q_{3,k} + q_{0,k}q_{2,k}) \\ 2(q_{1,k}q_{2,k} + q_{0,k}q_{3,k}) & q_{0,k}^2 - q_{1,k}^2 + q_{2,k}^2 - q_{3,k}^2 & 2(q_{2,k}q_{3,k} - q_{0,k}q_{1,k}) \\ 2(q_{1,k}q_{3,k} - q_{0,k}q_{2,k}) & 2(q_{2,k}q_{3,k} + q_{0,k}q_{1,k}) & q_{0,k}^2 - q_{1,k}^2 - q_{2,k}^2 + q_{3,k}^2 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

entre $C_{n,k}^b$ e o quatérnio de atitude, vê-se que (3.36) e (3.37) são funções não-lineares do vetor de estados x_k . Todavia, utilizar diretamente as medidas dos sensores como saídas do sistema facilita a determinação da incerteza associada ao termo ϵ_k de ruído. Em razão das inúmeras fontes de perturbação que podem atuar sobre um sensor, é prática quase universal assumir $\epsilon_k \sim N(0, R_k)$, assim como já foi feito anteriormente neste trabalho. Nestas situações, a matriz de covariâncias R_k é geralmente dada no manual (ou também referido como *datasheet*) do sensor ou pode ser obtida por procedimentos de identificação [51].

Caso não se queira lidar com as relações não-lineares em (3.42), pode-se utilizar um artifício que transforme (3.36) e (3.37) em equações lineares de saída. Por exemplo, seguir o procedimento de cálculo do quatérnio de rotação mínima da Seção 3.4 para determinar q_k^m e q_k^f , respectivamente o quatérnio que alinha os vetores magnéticos $m_{mag,k}^b$ e m_E^n e os vetores gravitacionais f_k^b e g_E^n . Desta maneira, (3.36) e (3.37) são convertidas para

$$q_k^m = q_{n,k}^b + \epsilon_{q^m,k}, \quad (3.43)$$

$$q_k^f = q_{n,k}^b + \epsilon_{q^f,k}, \quad (3.44)$$

em que $\epsilon_{q^m,k}$ e $\epsilon_{q^f,k}$ modelam, respectivamente, os desvios entre a atitude real $q_{n,k}^b$ e os quatérnios de rotação mínima q_k^m e q_k^f . A representação (3.43)-(3.44), no entanto, torna muito complexa a tarefa de se modelar os termos $\epsilon_{q^m,k}$ e $\epsilon_{q^f,k}$ de forma a compensar o problema

discutido na Seção 3.4 a respeito do desvio entre o quatérnio de rotação mínima e o quatérnio real de orientação do corpo. De maneira a garantir que estes desvios sejam pequenos, pode-se proceder como em [53, 55] e realizar um pré-processamento conjunto de (3.36) e (3.37) para obtenção de uma “medida” $q_k^{m,f}$ do quatérnio $q_{n,k}^b$. Dois métodos determinísticos e comuns na literatura para o cálculo de quatérnios a partir de medidas vetoriais são apresentados a seguir:

- **TRIAD melhorado** ([56]): a DCM $C_{n,k}^b$ de orientação do sistema de coordenadas **b** do corpo para o sistema **n** de referência é dada por

$$C_{n,k}^b = [i^b \mid j^b \mid k^b][i^n \mid j^n \mid k^n]^T, \quad (3.45)$$

em que

$$\begin{aligned} i^b &= \frac{f_k^b - b_k^a + m_{mag,k}^b}{\|f_k^b - b_k^a + m_{mag,k}^b\|}, & i^n &= \frac{g_E^n + m_E^n}{\|g_E^n + m_E^n\|}, \\ j^b &= \frac{i^b \times (f_k^b - b_k^a - m_{mag,k}^b)}{\|i^b \times (f_k^b - b_k^a - m_{mag,k}^b)\|}, & j^n &= \frac{i^n \times (g_E^n - m_E^n)}{\|i^n \times (g_E^n - m_E^n)\|}, \\ k^b &= i^b \times j^b, & k^n &= i^n \times j^n. \end{aligned}$$

- **QUEST (Quaternion ESTimator)** ([53, 66] e referências): o algoritmo QUEST fornece a solução ótima q^* para o problema de estimação de atitude de satélites proposto por Wahba em [66]. Sejam $\xi_{norm}^{n,i} = \xi^{n,i}/\|\xi^{n,i}\|$ um vetor unitário medido no sistema de coordenadas de referência **n** e $\xi_{norm}^{b,i} = \xi^{b,i}/\|\xi^{b,i}\|$ este mesmo vetor medido no sistema **b** do corpo, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Seja também δ^i a incerteza (em radianos) associada à direção deste i -ésimo par de vetores. Definindo a matriz Hessiana simétrica

$$H_{es} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\delta^i} \begin{bmatrix} \mathbb{I}((\xi_{norm}^{b,i})^T \xi_{norm}^{n,i}) - \xi_{norm}^{n,i}(\xi_{norm}^{b,i})^T - \xi_{norm}^{b,i}(\xi_{norm}^{n,i})^T & -(\xi_{norm}^{b,i} \times \xi_{norm}^{n,i}) \\ -(\xi_{norm}^{b,i} \times \xi_{norm}^{n,i})^T & -(\xi_{norm}^{b,i})^T \xi_{norm}^{n,i} \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

em que o somatório em (3.46) é realizado com todos os m pares de vetores não-colineares disponíveis, o quatérnio de atitude q^* que corresponde à solução ótima do problema de Wahba é dado pelo autovetor normalizado de H_{es} associado ao seu menor (mais negativo) autovalor. Em outras palavras,

$$q^* = \left\{ \frac{q}{\|q\|} \mid H_{es}q = \lambda_{min}q, \lambda_{min} = \min[\text{eigen}(H_{es})] \right\}, \quad (3.47)$$

em que $\text{eigen}(H_{es})$ é o conjunto de todos os autovalores de H_{es} . No caso analisado neste trabalho, $m = 2$ e os vetores são dados por

$$\begin{aligned} \xi_{norm}^{b,1} &= \frac{f_k^b - b_k^a}{\|f_k^b - b_k^a\|}, & \xi_{norm}^{b,2} &= \frac{m_{mag,k}^b}{\|m_{mag,k}^b\|}, \\ \xi_{norm}^{n,1} &= \frac{g_E^n}{\|g_E^n\|}, & \xi_{norm}^{n,2} &= \frac{m_E^n}{\|m_E^n\|}. \end{aligned}$$

Fazendo uso de (3.45) ou (3.47), pode-se converter o modelo não-linear de saída em (3.36) e (3.37) para

$$q_k^{m,f} = q_{n,k}^b + \epsilon_{m,f,k}, \quad (3.48)$$

em que $q_k^{m,f}$ é o quatérnio obtido por meio do processamento conjunto das medidas de campo magnético e gravitacional e $\epsilon_{m,f,k}$ modela incertezas e perturbações em torno desta estimativa inicial.

Apesar da simplicidade de (3.48), esta conversão das medidas dos sensores para o domínio dos quatérnios torna complexo estabelecer um modelo para a incerteza associada a $\epsilon_{m,f,k}$. Isso porque é difícil, senão impossível, obter uma forma fechada para a transformação

$$h_{qu} (f_k^b, b_k^a, g_E^n, m_{mag,k}^b, m_E^n) \longrightarrow q_k^{m,f}$$

que leva das medidas vetoriais para a estimativa do quatérnio, impossibilitando a utilização de algoritmos de filtragem baseados em cálculo de matrizes Jacobianas para propagação de incertezas (FKE, por exemplo). Na situação em que não há forma fechada para h_{qu} , uma alternativa é gerar, a todo passo k do filtro, uma série de amostras de $q_k^{m,f}$ a partir de simulações da dispersão de h_{qu} em torno da média de seus argumentos e estimar a variância de $\epsilon_{m,f,k}$ a partir da variância amostral [67, 68]. Contudo, este método requer que uma grande quantidade de amostras seja gerada a cada passo do filtro, o que implica uma carga computacional enorme. Recentemente, Julier e Uhlmann propuseram a Transformada Unscented (UT, do inglês *Unscented Transform*) [69–72] para propagar médias e covariâncias de variáveis aleatórias que sofrem transformações não-lineares. No lugar de uma linearização de primeira ordem como a do FKE, o princípio da UT está em representar a distribuição *a priori* dos argumentos de h_{qu} por meio de pontos-sigma, um conjunto reduzido, porém representativo, de amostras obtido de maneira determinística. A partir da transformação destes pontos por meio da função h_{qu} , pode-se obter uma estimativa da média e da covariância propagadas por meio da dispersão das amostras de $q_k^{m,f}$ transformadas. Em razão da capacidade da UT em representar de maneira precisa os parâmetros das distribuições das variáveis aleatórias transformadas, da facilidade de cálculo dos pontos-sigma e da ausência de necessidade de determinação de matrizes Jacobianas, Julier e Uhlmann propuseram o Filtro de Kalman *Unscented* (FKU) [70, 72], que incorpora a UT aos passos de predição e correção do FK. Atualmente, o FKU tem sido usado em uma série de trabalhos lidando com a estimação e filtragem de sistemas não-lineares complexos, incluindo a estimação de quatérnios de atitude [73–75]. Uma discussão mais detalhada acerca da UT e do FKU é feita no Apêndice A em razão da utilidade e relevância destes resultados.

Mesmo podendo parecer contraditório, tendo em vista o anteriormente exposto acerca das possíveis vantagens da UT e do FKU para estimação de estados de sistemas não-lineares, optou-se pela utilização do FKE nos filtros do Capítulo 4 para realização da análise de desempenho do Capítulo 5. Além disso, o modelo de medição linear em (3.48) foi preterido em favor da utilização de (3.36) e (3.37). Dentre as razões que serviram como base para tomada

destas decisões, está o desejo de comparar, da melhor forma possível, os filtros híbridos para sistemas MM propostos no Capítulo 4 com alguns resultados consagrados e recentes disponíveis na literatura, todos eles utilizando o FKE para estimação de estados de cada uma das hipóteses do sistema. Ademais, é fácil obter expressões analíticas para as Jacobianas das funções de medição (3.36) e (3.37) se a hipótese de independência entre as componentes do quaternio for assumida, assim como será discutido nas Seções 3.6.2 e 3.6.3 a seguir. Por fim, uma vez que se está tratando do projeto de um sistema de localização robusto a falhas dos sensores, o isolamento de suas medidas em diferentes equações torna o seu tratamento mais simples. Contudo, utilizar o FKU é viável nos algoritmos propostos no Capítulo 4, devendo este filtro ser considerado caso o *hardware* disponível para os cálculos seja capaz de realizar, em tempo hábil, as operações matriciais (decomposição de Cholesky) necessárias para geração dos pontos-sigma.

3.6.2 Cálculo de Jacobianas com variáveis condicionadas

Considere a forma geral de (3.37) e (3.41). Nestas equações, o primeiro membro contém um vetor ξ^b medido no referencial do corpo \mathbf{b} , enquanto que no segundo a inversa¹ de $C_{n,k}^b$ multiplica a representação ξ^n deste mesmo vetor no sistema de referência \mathbf{n} . Considerando a expressão (3.42) para a DCM e suprimindo a dependência do índice k nas situações em que ela está implícita pelo contexto, tem-se a equação vetorial não-linear de medição

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi_x^b \\ \xi_y^b \\ \xi_z^b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \xi_x^n + 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) \xi_y^n + 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \xi_z^n \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) \xi_x^n + (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) \xi_y^n + 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \xi_z^n \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \xi_x^n + 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \xi_y^n + (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \xi_z^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_x(q_n^b, \xi^n) \\ h_y(q_n^b, \xi^n) \\ h_z(q_n^b, \xi^n) \end{bmatrix} = H_{x,y,z}(q_n^b, \xi^n). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Devido à linearização de primeira ordem realizada pelo FKE em suas equações de predição e correção de estimativas, faz-se necessário calcular a matriz Jacobiana

$$J_{qu} = \frac{\partial H_{x,y,z}(q_n^b, \xi^n)}{\partial x_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_x(q_n^b, \xi^n)}{\partial x_k} \\ \frac{\partial h_y(q_n^b, \xi^n)}{\partial x_k} \\ \frac{\partial h_z(q_n^b, \xi^n)}{\partial x_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_x}{\partial q_n^b} & \frac{\partial h_x}{\partial p^n} & \frac{\partial h_x}{\partial v^n} & \frac{\partial h_x}{\partial b^a} \\ \frac{\partial h_y}{\partial q_n^b} & \frac{\partial h_y}{\partial p^n} & \frac{\partial h_y}{\partial v^n} & \frac{\partial h_y}{\partial b^a} \\ \frac{\partial h_z}{\partial q_n^b} & \frac{\partial h_z}{\partial p^n} & \frac{\partial h_z}{\partial v^n} & \frac{\partial h_z}{\partial b^a} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

de (3.49) com respeito ao vetor de estados (3.29). Dado que a função de medição (3.49) é

¹Por ser uma matriz ortogonal, é válida a equivalência $(C_{n,k}^b)^{-1} = (C_{n,k}^b)^T$.

dependente apenas da porção de x_k referente ao quatérnio q_n^b , (3.50) simplifica-se para

$$J_{qu} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_x}{\partial q_n^b} & \frac{\partial h_x}{\partial p^n} & \frac{\partial h_x}{\partial v^n} & \frac{\partial h_x}{\partial b^a} \\ \frac{\partial h_y}{\partial q_n^b} & \frac{\partial h_y}{\partial p^n} & \frac{\partial h_y}{\partial v^n} & \frac{\partial h_y}{\partial b^a} \\ \frac{\partial h_z}{\partial q_n^b} & \frac{\partial h_z}{\partial p^n} & \frac{\partial h_z}{\partial v^n} & \frac{\partial h_z}{\partial b^a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_x}{\partial q_n^b} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial h_y}{\partial q_n^b} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial h_z}{\partial q_n^b} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Para cada um dos termos não-nulos de (3.51), tem-se

$$\frac{\partial h_i}{\partial q_n^b} = \left[\frac{\partial h_i}{\partial q_0} \quad \frac{\partial h_i}{\partial q_1} \quad \frac{\partial h_i}{\partial q_2} \quad \frac{\partial h_i}{\partial q_3} \right], \quad i \in \{x, y, z\}. \quad (3.52)$$

Neste ponto, é pertinente tecer algumas considerações a respeito de como são determinadas as derivadas parciais em (3.52). A princípio, pode parecer que esta é uma tarefa simples e direta, visto que as três diferentes funções de medição em (3.49) são expressões polinomiais das componentes do quatérnio q_n^b . De fato, diversos livros de Cálculo de nível superior, juntamente com todas as referências bibliográficas deste trabalho que tratam explicitamente do cálculo de (3.52), consideram apenas a situação em que as variáveis do domínio da função, no caso q_0, q_1, q_2 e q_3 , são independentes, ou seja, incrementos $q_i + \Delta_i$ na i -ésima variável do domínio não implicam variações $q_j + \Delta_j$, $i \neq j, i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, nas outras variáveis. Nesta situação, a derivada parcial com relação à variável q_i considera constantes todas as outras q_j , $i \neq j$, resultando nas igualdades

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_x}{\partial q_0} &= 2q_0\xi_x^n + 2q_3\xi_y^n - 2q_2\xi_z^n, & \frac{\partial h_x}{\partial q_1} &= 2q_1\xi_x^n + 2q_2\xi_y^n + 2q_3\xi_z^n, \\ \frac{\partial h_x}{\partial q_2} &= -2q_2\xi_x^n + 2q_1\xi_y^n - 2q_0\xi_z^n, & \frac{\partial h_x}{\partial q_3} &= -2q_3\xi_x^n + 2q_0\xi_y^n + 2q_1\xi_z^n, \\ \frac{\partial h_y}{\partial q_0} &= -2q_3\xi_x^n + 2q_0\xi_y^n + 2q_1\xi_z^n, & \frac{\partial h_y}{\partial q_1} &= 2q_2\xi_x^n - 2q_1\xi_y^n + 2q_0\xi_z^n, \\ \frac{\partial h_y}{\partial q_2} &= 2q_1\xi_x^n + 2q_2\xi_y^n + 2q_3\xi_z^n, & \frac{\partial h_y}{\partial q_3} &= -2q_0\xi_x^n - 2q_3\xi_y^n + 2q_2\xi_z^n, \\ \frac{\partial h_z}{\partial q_0} &= 2q_2\xi_x^n - 2q_1\xi_y^n + 2q_0\xi_z^n, & \frac{\partial h_z}{\partial q_1} &= 2q_3\xi_x^n - 2q_0\xi_y^n - 2q_1\xi_z^n, \\ \frac{\partial h_z}{\partial q_2} &= 2q_0\xi_x^n + 2q_3\xi_y^n - 2q_2\xi_z^n, & \frac{\partial h_z}{\partial q_3} &= 2q_1\xi_x^n + 2q_2\xi_y^n + 2q_3\xi_z^n. \end{aligned} \quad (3.53)$$

As expressões para as derivadas em (3.53) são válidas apenas se a hipótese de independência entre as variáveis do domínio for assumida. Há, no entanto, um detalhe que está sendo negligenciado ao se fazer tal hipótese: as variáveis q_0 a q_3 não são independentes! Em razão da maneira como foi definido, existe a restrição $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ entre as componentes do quatérnio q_n^b , que restringe o domínio das funções em (3.52). Adicionalmente, esta restrição faz com que existam apenas três graus de liberdade disponíveis dentre as componentes

de q_n^b , ou seja, a quarta componente q_3 , por exemplo, é uma função dos valores de q_0 , q_1 e q_2 caso se permita que estas últimas variem livremente. Sendo assim, pode-se escrever

$$q_3 = c(q_0, q_1, q_2) = \pm \sqrt{1 - (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2)}, \quad (3.54)$$

em que se pode ver claramente a dependência funcional entre as componentes de q_n^b . Ressalta-se aqui que q_3 foi escolhida ao acaso e que não haveria problema algum em se escolher qualquer uma das outras componentes q_0 a q_2 para ser escrita no primeiro membro de (3.54). Levando-se em conta a restrição (3.54), em que apenas q_0 , q_1 e q_2 são independentes, a expressão para a derivada total da função de medição em (3.49) torna-se

$$\frac{dH_{x,y,z}(q_n^b, \xi^n)}{dx_k} = \begin{bmatrix} \frac{dh_x}{dq_n^b} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{dh_y}{dq_n^b} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{dh_z}{dq_n^b} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

em que

$$\frac{dh_i}{dq_n^b} = \left[\frac{dh_i}{dq_0} \quad \frac{dh_i}{dq_1} \quad \frac{dh_i}{dq_2} \quad \frac{dh_i}{dq_3} \right], \quad i \in \{x, y, z\}, \quad (3.56)$$

$$\frac{dh_i}{dq_0} = \frac{\partial h_i}{\partial q_0} \overset{1}{\cancel{\frac{\partial q_0}{\partial q_0}}} + \frac{\partial h_i}{\partial q_1} \overset{0}{\cancel{\frac{\partial q_1}{\partial q_0}}} + \frac{\partial h_i}{\partial q_2} \overset{0}{\cancel{\frac{\partial q_2}{\partial q_0}}} + \frac{\partial h_i}{\partial q_3} \underbrace{\frac{\partial q_3}{\partial q_0}}_{\neq 0} = \frac{\partial h_i}{\partial q_0} + \frac{\partial h_i}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial q_0}, \quad (3.57)$$

$$\frac{dh_i}{dq_1} = \frac{\partial h_i}{\partial q_1} + \frac{\partial h_i}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial q_1}, \quad (3.58)$$

$$\frac{dh_i}{dq_2} = \frac{\partial h_i}{\partial q_2} + \frac{\partial h_i}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial q_2}, \quad (3.59)$$

$$\frac{dh_i}{dq_3} = \frac{\partial h_i}{\partial q_3} + \frac{\partial h_i}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial q_3} + \frac{\partial h_i}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial q_3}. \quad (3.60)$$

Calcular as derivadas parciais $\partial q_i / \partial q_j$ em (3.57)-(3.60) não é tarefa trivial, principalmente em razão da indefinição de sinal em (3.54). Além disso, Thomas et al. mostram no Capítulo 11 de [76] que os resultados das derivadas em (3.57)-(3.60) podem mudar radicalmente dependendo de qual componente de q_n^b seja escolhida como variável dependente. De fato, esta escolha deve ser vista como um dos parâmetros de projeto do sistema de controle. Procurando dar um significado físico à discussão, considere, por exemplo, um processo químico particular em que seja razoável assumir válida a Equação de Van der Waals para gases ideais

$$P_{re} V_{ol} = n_{mol} R_{gas} T_{emp}, \quad (3.61)$$

em que P_{re} é a pressão do gás, V_{ol} é o seu volume, n_{mol} é o número de moles de moléculas do gás, T_{emp} é a sua temperatura em Kelvin e R_{gas} é a constante universal dos gases. Dependendo da aplicação, talvez seja interessante manter P_{re} e V_{ol} sob controle, enquanto T_{emp}

pode variar livremente segundo (3.61). Por outro lado, em um processo químico que necessita de temperatura constante e que seja realizado em um ambiente confinado, V_{ol} e T_{emp} seriam controlados, enquanto que P_{re} modificar-se-ia em conformidade com (3.61). Caso as componentes de q_n^b fossem, de fato, independentes, é fácil ver que $\partial q_i / \partial q_j = 0$, $i \neq j$, e (3.55) e (3.56) reduzir-se-iam a (3.51) e (3.52), sendo as derivadas parciais calculadas de acordo com (3.53).

No lugar de se levar em conta explicitamente restrições semelhantes a (3.54), acarretando as dificuldades de cálculo ressaltadas nesta seção, existe uma abordagem alternativa ao problema de filtragem deste tipo de sistema, denominada Estimação de Estados sob Restrições (*Constrained State Estimation*, ver [77–82] e referências). De maneira geral, trabalhos nesta área assumem a independência entre as variáveis de estado nas expressões matemáticas de seus filtros, simplificando o processo de obtenção de estimativas. Em seguida, algumas técnicas são propostas para adequar as estimativas obtidas às restrições impostas ao sistema, ainda que, muitas vezes, as restrições possam não ser estritamente satisfeitas [80]. Ao se fazer uso de tais métodos, pode-se assumir que as componentes de q_n^b são independentes e utilizar (3.51)-(3.53) nas equações de estimação do quatérnio de orientação. Este é o assunto da próxima seção.

3.6.3 Estimação de estados sob restrições de igualdade

A fim de contextualizar o tema desta seção, considere o modelo dinâmico em tempo discreto para o vetor de estados x_k em (3.29) dado por (3.30)-(3.32). Além disso, suponha que esteja disponível uma seqüência $y_{1:k} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ de medidas de saída corrompidas por ruído geradas segundo o modelo (3.33)-(3.37). Antecipando as discussões do Capítulo 4 e do Apêndice A, o problema de estimação de x_k pode ser encarado como a busca pela estimativa \hat{x}_k que otimiza uma função de custo $\rho(x_k|y_{1:k})$ condicionada à seqüência de medições $y_{1:k}$. Ainda que $\rho(x_k|y_{1:k})$ possa ser arbitrariamente escolhida dependendo das propriedades desejadas para \hat{x}_k , a literatura a respeito de filtragem estocástica geralmente define duas formas principais para esta função. A primeira delas fornece a estimativa \hat{x}_k de máxima probabilidade *a posteriori* (ou máxima verossimilhança Bayesiana [45]), ou seja,

$$\hat{x}_k = \arg \max_{x_k} p(x_k|y_{1:k}), \quad (3.62)$$

em que $\rho(x_k|y_{1:k}) = p(x_k|y_{1:k})$ é a f.d.p. *a posteriori* de x_k condicionada às medidas $y_{1:k}$. Em outras palavras, a estimativa \hat{x}_k neste tipo de problema de otimização corresponde ao valor de x_k de “maior probabilidade”². Outra maneira é definir

$$\hat{x}_k = \arg \min_x E\{(x_k - x)^T(x_k - x)|y_{1:k}\}, \quad (3.63)$$

²Uma vez que x_k é uma variável aleatória de distribuição contínua, tem-se $\Pr(x_k|y_{1:k}) = 0, \forall x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, ou seja, todos os valores de x_k têm probabilidade igual (e nula) de ocorrência. Contudo, ao se utilizar a expressão “maior probabilidade”, está-se enfatizando que \hat{x}_k é um ponto crítico da região de maior concentração de probabilidade de $p(x_k|y_{1:k})$. Mais a este respeito pode ser visto no Apêndice A.

em que \hat{x}_k é a estimativa condicionada às medidas $y_{1:k}$ que minimiza os desvios em relação à variável aleatória x_k . Para o caso linear e Gaussiano, as equações (3.62) e (3.63) coincidem e a solução ótima \hat{x}_k de máxima probabilidade *a posteriori* e mínima variância é dada pelo FK [45]. Contudo, esta afirmação não é válida para sistemas não-lineares, podendo ser as estimativas de máxima probabilidade *a posteriori* e mínima variância bastante diferentes. Além disso, a otimização de (3.62) e (3.63) em sistemas não-lineares genéricos é normalmente tarefa não-trivial, podendo até mesmo não existir forma analítica de solução do problema.

Em vista do anteriormente exposto, passa-se agora à consideração do problema de estimação de estados sob restrições de igualdade, que envolve a otimização de (3.62), (3.63) ou ambas na presença de uma restrição na forma

$$D^r(x_k) = s_k, \quad (3.64)$$

em que $D^r(x_k) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_s}$ é uma função que restringe x_k ao domínio $\mathbb{R}_{rest,k} = \{x_k | D^r(x_k) = s_k\} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$; e $s_k \in \mathbb{R}^{n_s}$ é um vetor conhecido e possivelmente dependente do parâmetro k , onde se assume $n_s \leq n_x$. No lugar de se encarar (3.64) como um fator complicador no processo de estimação de estados, a presença desta restrição de domínio atua no sentido de fornecer ao filtro informações adicionais sobre a dinâmica do sistema, permitindo um refinamento ainda maior das estimativas \hat{x}_k em relação às que seriam obtidas caso (3.64) não fosse levada em conta [77, 79, 81, 82].

Uma vez que (3.64) define n_s equações de restrição, deixando apenas $n_x - n_s$ variáveis independentes no vetor de estados x_k , a abordagem de Redução de Modelo (*Model Reduction* [82]) ao problema de estimação de estados sob restrições é isolar explicitamente estas n_s variáveis em (3.64) em termos das $n_x - n_s$ variáveis de estado independentes restantes e resolver (3.62) ou (3.63) sem considerar restrições. É importante observar que esta é exatamente a abordagem discutida na Seção 3.6.2, em que a restrição de norma unitária do quatérnio é considerada explicitamente e permite que q_3 (ou qualquer uma das outras componentes de q_n^b) seja escrita em termos das outras três componentes do quatérnio de orientação do corpo. Contudo, este isolamento de variáveis de estado em (3.64) pode ser difícil, ou até mesmo impossível, dependendo dos tipos de relações não-lineares entre variáveis de estado definidas por $D^r(x_k)$, o que motiva a busca por soluções alternativas. Felizmente, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) propôs uma solução para este problema na forma do método dos Multiplicadores de Lagrange [76, 83]. Em linhas gerais, este método permite que se resolva o problema de maximização (ou minimização) de uma função $\rho(x_k)$ qualquer, incluindo aquelas $\rho(x_k|y_{1:k})$ condicionadas às medidas do sistema, sujeitas a uma restrição genérica (3.64), ao determinar os pontos estacionários da Função de Lagrange

$$\Lambda(x_k, \lambda) = \rho(x_k) + \lambda(D^r(x_k) - s_k), \quad (3.65)$$

em que a nova variável λ é um Multiplicador de Lagrange e todas as componentes de x_k são supostas independentes. Define-se como ponto estacionário de (3.65) os valores \hat{x}_k^r e λ^r tais

que

$$\left. \frac{\partial \Lambda(x_k, \lambda)}{\partial x_k} \right|_{\hat{x}_k^r, \lambda^r} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Lambda(x_k, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\hat{x}_k^r, \lambda^r} = 0, \quad (3.66)$$

em que \hat{x}_k^r é a estimativa ótima de estado restrita ao domínio $\mathbb{R}_{rest,k}$ definido por (3.64). Para o problema de estimação de x_k em (3.29) sujeito à restrição $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$, devem-se encontrar os pontos estacionários de

$$\Lambda(x_k, \lambda) = p(x_k | y_{1:k}) + \lambda \left(\sum_{i=0}^3 q_i^2 - 1 \right). \quad (3.67)$$

Devido às porções não-lineares das equações do sistema de localização, não é possível determinar $p(x_k | y_{1:k})$ de maneira explícita e, portanto, (3.67) não pode ser usada para determinar a estimativa de estado \hat{x}_k^r que obedece a restrição de norma unitária do quatérnio. De fato, [77, 80, 81] ressaltam que este tipo de solução explícita está disponível, em geral, apenas para sistemas lineares, como será mostrado na Seção 3.6.3.1 a seguir. Extensões das técnicas da Seção 3.6.3.1 para sistemas não-lineares são mostradas na Seção 3.6.3.2, onde é apresentada também a solução adotada neste trabalho para lidar com a restrição de norma unitária dos quatérnios estimados.

3.6.3.1 Projeção de estimativas para sistemas lineares

Considere o sistema dinâmico linear discreto

$$x_k = A_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1}, \quad (3.68)$$

$$y_k = C_k x_k + v_k, \quad (3.69)$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados; $A_{k-1} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x}$, $B_{k-1} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u}$ e $C_k : \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_x}$ são matrizes conhecidas; $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de saída; e $v_k \in \mathbb{R}^{n_v}$, $v_k \sim N(0, R_k)$, e $w_{k-1} \in \mathbb{R}^{n_w}$, $w_{k-1} \sim N(0, Q_{k-1})$, são processos de ruído branco Gaussiano independentes, com média nula e matrizes de covariâncias R_k e Q_{k-1} , respectivamente. Além disso, assuma que as variáveis do vetor de estados x_k seguem uma restrição da forma

$$D_k^r x_k = s_k, \quad (3.70)$$

em que $D_k^r : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n_x}$ é a versão linear de (3.64) e $s \leq n_x$. Assume-se, sem perda de generalidade, que D_k^r é uma matriz com *rank* completo. Caso não seja, existirão uma ou mais restrições redundantes dentre aquelas definidas por D_k^r , podendo-se eliminar todas as redundâncias sem prejuízo algum ao sistema [77]. Caso D_k^r seja quadrada, ou seja, $s = n_x$, há restrição total das variáveis de estado e a única estimativa \hat{x}_k^r possível é aquela dada por $\hat{x}_k^r = (D_k^r)^{-1} s_k$.

Usando o método dos Multiplicadores de Lagrange (3.65)-(3.66), Simon e Chia demonstram em [77] que a solução dos problemas de otimização de máxima probabilidade *a posteriori* (3.62) e de mínima variância (3.63) sujeitos à restrição (3.70) são casos particulares do

Método de Projeção, que é definido por

$$\hat{x}_k^r = \arg \min_x \{ (x - \hat{x}_k)^T W_{ei} (x - \hat{x}_k) \}, \quad (3.71)$$

em que \hat{x}_k é a estimativa obtida pelo FK sem considerar (3.70); \hat{x}_k^r é a sua projeção no domínio $\mathbb{R}_{rest,k}$ definido por esta restrição; e W_{ei} é uma matriz de ponderação. A solução conjunta de (3.70) e (3.71) é dada por

$$\hat{x}_k^r = \hat{x}_k - W_{ei}^{-1} (D_k^r)^T \left(D_k^r W_{ei}^{-1} (D_k^r)^T \right)^{-1} (D_k^r \hat{x}_k - s_k). \quad (3.72)$$

A solução de (3.62) é encontrada ao se escolher $W_{ei} = \hat{P}_k^{-1}$ em (3.72) e dá origem ao *Kalman Filter by Estimate Projection* (PKF-EP) [77, 84], em que \hat{P}_k é a matriz de covariâncias associada à estimativa sem restrição \hat{x}_k . Para (3.63), deve-se escolher $W_{ei} = \mathbb{I}_{n_x \times n_x}$. Os autores em [77] também demonstram uma série de propriedades estatísticas da estimativa projetada \hat{x}_k^r , enunciadas aqui sem prova:

- **Teorema 1:** a estimativa projetada \hat{x}_k^r dada por (3.72) é um estimador de estado não-viesado para o sistema (3.68)-(3.69) sujeito à restrição (3.70) para qualquer matriz conhecida W_{ei} positiva definida. Isto é, $E\{\hat{x}_k^r\} = E\{x_k\}$;
- **Teorema 2:** a estimativa projetada \hat{x}_k^r dada por (3.72) com $W_{ei} = \hat{P}_k^{-1}$, em que \hat{P}_k é matriz de covariâncias associada a \hat{x}_k , tem covariância do erro menor do que aquela da estimativa não-projetada \hat{x}_k , i.e., $\text{Cov}(x_k - \hat{x}_k^r) < \text{Cov}(x_k - \hat{x}_k)$;
- **Teorema 3:** dentre todas as estimativas projetadas por (3.72), aquela que usa $W_{ei} = \hat{P}_k^{-1}$ tem a menor variância do erro de estimação;
- **Teorema 4:** a estimativa projetada \hat{x}_k^r em (3.72) com $W_{ei} = \mathbb{I}_{n_x \times n_x}$ satisfaz a desigualdade $\|x_k - \hat{x}_k^r\| \leq \|x_k - \hat{x}_k\|$;
- **Teorema 5:** o erro da estimativa projetada \hat{x}_k^r em (3.72) com $W_{ei} = \mathbb{I}_{n_x \times n_x}$ é menor do que o erro da estimativa \hat{x}_k no sentido de que $\text{Tr}[\text{Cov}(\hat{x}_k^r)] \leq \text{Tr}[\text{Cov}(\hat{x}_k)]$, em que $\text{Tr}[\cdot]$ indica o traço da matriz³.

Teixeira et al. em [79] estendem os resultados de [77] ao apresentar o *Equality-Constrained Kalman Filter* (ECKF), o estimador ótimo para sistemas lineares com restrições (3.68)-(3.70). Além dos passos de predição e correção de estimativas do FK (ver Apêndice A), o ECKF incorpora uma etapa de projeção de estimativas (*projection step*) que confina a estimativa \hat{x}_k obtida sem considerar (3.70) ao domínio $\mathbb{R}_{rest,k}$ definido por esta restrição, dando

³Somatório dos termos da diagonal principal.

origem a \hat{x}_k^r e sua matriz de covariâncias \hat{P}_k^r associada. Definindo

$$\hat{s}_k = D_k^r \hat{x}_k, \quad (3.73)$$

$$P_k^s = D_k^r \hat{P}_k (D_k^r)^T, \quad (3.74)$$

$$P_k^{x,s} = \hat{P}_k (D_k^r)^T, \quad (3.75)$$

$$K_k^s = P_k^{x,s} (P_k^s)^{-1}, \quad (3.76)$$

em que \hat{x}_k e sua matriz de covariâncias \hat{P}_k são as estimativas corrigidas de (3.68)-(3.69) dadas por um FK, o passo de projeção de estimativas do ECKF é dado por

$$\hat{x}_k^r = \hat{x}_k + K_k^s (s_k - \hat{s}_k), \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_k^r &= \hat{P}_k - K_k^s P_k^s (K_k^s)^T \\ &= (\mathbb{I} - K_k^s D_k^r) \hat{P}_k (\mathbb{I} - K_k^s D_k^r)^T. \end{aligned} \quad (3.78)$$

em que a segunda igualdade em (3.78) (Forma Estabilizada de Joseph [45]) é menos sensível a erros de aproximação numérica. A diferença fundamental entre o PKF-EP e o ECKF é que, no primeiro, a estimativa \hat{x}_k , que não leva em conta a restrição, é realimentada para o passo $k + 1$ do filtro, enquanto que no ECKF é a estimativa projetada \hat{x}_k^r que é realimentada. Embora estes dois filtros tenham estimativas finais \hat{x}_k^r idênticas, o fato do ECKF realimentar as estimativas projetadas faz com que o seu passo de predição de estimativas seja melhor do que o do PKF-EP [79, 80], tornando o ECKF a opção mais adequada. Frisa-se que a projeção (3.73)-(3.78) faz com que \hat{x}_k^r obedeça (3.70) exatamente, algo que não pode ser garantido para os sistemas não-lineares da Seção 3.6.3.2.

Outra forma muito difundida (ver [55, 77, 79–82] e referências) e direta de se levar em conta restrições (3.70) no problema de estimação de estados de (3.68)-(3.69) é considerar um sistema com medidas aumentadas

$$\begin{aligned} y_k^a &= \begin{bmatrix} y_k \\ s_k \end{bmatrix} = C_k^a x_k + v_k^a, \\ C_k^a &= \begin{bmatrix} C_k \\ D_k^r \end{bmatrix}, \quad v_k^a = \begin{bmatrix} v_k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_k^a \sim N(0, R_k^a), \quad R_k^a = \begin{bmatrix} R_k & 0_{n_y \times s} \\ 0_{s \times n_y} & 0_{s \times s} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

em que a restrição (3.70) é incorporada ao vetor de saída y_k em (3.69) na forma de uma pseudo-medida (medida que não é proveniente de nenhum sensor físico) s_k com ruído de medição nulo em R_k^a , ou seja, uma medida perfeita. Em seguida, o modelo dinâmico do sistema (3.68), juntamente com a nova equação de saída (3.79), são utilizados normalmente no algoritmo do FK para obtenção da estimativa projetada \hat{x}_k^a . Ainda que não exista nenhum impedimento teórico⁴ na consideração de medidas perfeitas nas equações do FK, [59, 77] ressaltam que ruídos de medição nulos tornam as implementações computacionais do FK susceptíveis a erros numéricos em razão da singularidade de R_k^a .

⁴Kalman apresenta um exemplo em que medidas perfeitas são utilizadas em seu artigo seminal [85] a respeito de filtragem estocástica para sistemas lineares.

Para o caso linear analisado em (3.68)-(3.69), Teixeira et al. apresentam em [79, 81] uma demonstração formal da equivalência entre o ECKF e o *Measurement-Augmentation Kalman Filter* (MAKF), o filtro obtido a partir da aplicação do FK ao sistema formado por (3.68) e (3.79). Dessa forma, tem-se a igualdade $\hat{x}_k^a = \hat{x}_k^r$, ou seja, o MAKF também é um estimador ótimo para o sistema linear (3.68)-(3.69) sob a restrição (3.70). Uma maneira mais intuitiva de ver esta equivalência faz uso dos resultados da Seção 3.5.5, em que se discutiu a possibilidade de correção seqüencial de estimativas de um FK caso as medidas dos sensores sejam descorrelacionadas, ou seja, R_k seja diagonal. Notando que R_k^a do sistema aumentado é, de fato, diagonal, (3.73)-(3.78) podem ser interpretadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\hat{s}_k &= D_k^r \hat{x}_k && \longrightarrow \text{Pseudo-medida predita,} \\
P_k^s &= D_k^r \hat{P}_k (D_k^r)^T && \longrightarrow \text{Matriz de covariâncias do termo de inovação } (s_k - \hat{s}_k), \\
P_k^{x,s} &= \hat{P}_k (D_k^r)^T && \longrightarrow \text{Matriz de correlação cruzada,} \\
K_k^s &= P_k^{x,s} (P_k^s)^{-1} && \longrightarrow \text{Ganho de Kalman para correção pela pseudo-medida,} \\
\hat{x}_k^r &= \hat{x}_k + K_k^s (s_k - \hat{s}_k) && \longrightarrow \text{Correção de } \hat{x}_k \text{ pela pseudo-medida,} \\
\hat{P}_k^r &= (\mathbb{I} - K_k^s D_k^r) \hat{P}_k (\mathbb{I} - K_k^s D_k^r)^T && \longrightarrow \text{Correção de } \hat{P}_k \text{ pela pseudo-medida.}
\end{aligned}$$

Deve-se notar que estes passos correspondem exatamente à correção da estimativa \hat{x}_k por meio de um sensor virtual

$$s_k = D_k^r x_k + v_k^s, \quad v_k^s \sim N(0, R_k^s), \quad (3.80)$$

em que $R_k^s = 0$. O caso $R_k^s \neq 0$ também é válido e representa uma solução prática para os problemas numéricos relacionados a matrizes R_k^a singulares em que um ruído sem significado físico é assumido. A desvantagem de se fazer isso é que $\hat{x}_k^a \neq \hat{x}_k^r$ e a estimativa do sistema aumentado \hat{x}_k^a deixa de obedecer exatamente a (3.70) [59].

3.6.3.2 Extensão para a restrição não-linear de norma de quatérnios

As seções anteriores apresentaram duas técnicas largamente utilizadas na literatura para a obtenção da estimativa de estado ótima \hat{x}_k^r do sistema linear Gaussiano (3.68)-(3.69) com uma restrição linear (3.70): projeção de estimativas (ECKF) e uso de medidas perfeitas (MAKF). Além disso, foi provada a equivalência entre estas abordagens e mostrou-se que os problemas de otimização de máxima probabilidade *a posteriori* (3.62) e mínima variância (3.63) são casos particulares do problema de projeção de estimativas (3.71). Para o caso de sistemas não-lineares, no entanto, é difícil fazer afirmações correspondentes a respeito da otimalidade das estimativas obtidas e equivalência entre métodos, ainda que os mesmos objetivos e princípios sejam válidos [80, 82].

Considere um sistema dinâmico não-linear discreto

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1}, \quad (3.81)$$

$$y_k = h(x_k) + v_k, \quad (3.82)$$

sujeito à restrição (3.64) possivelmente não-linear. Em (3.81)-(3.82), $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados contínuos; $f : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é a função de evolução do processo; $h : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ e $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ são, respectivamente, a função de medição e o vetor de medições; $u_{k-1} \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entrada; e $v_k \in \mathbb{R}^{n_v}$ e $w_{k-1} \in \mathbb{R}^{n_w}$ são processos de ruído. Caso o sistema ou as restrições sejam não-lineares, não é possível, em geral, obter estimativas ótimas e as diversas técnicas disponíveis fornecem resultados diferentes. Nestas situações, o “melhor” algoritmo de estimação sob restrições torna-se dependente da aplicação [82]. Outra diferença marcante entre sistemas lineares e não-lineares sob restrições é a garantia de satisfação destas últimas. Enquanto que, para sistemas lineares, é possível projetar estimativas de tal maneira que elas estejam completamente de acordo com o conjunto de restrições impostas ao sistema [77, 79], filtros para sistemas não-lineares só podem garantir, normalmente, que suas estimativas satisfaçam as restrições de maneira aproximada [80–82].

Antes de apresentar algumas formas de tentar assegurar a norma unitária de quatérnios em problemas de filtragem não-linear, dentre elas a solução adotada neste trabalho, considera-se pertinente a seguinte pergunta que o leitor talvez esteja se fazendo: para garantir que o quatérnio estimado $\hat{q}_{n,k}^b$ tenha norma unitária a todo instante, fazer

$$\hat{q}_{n,k}^b := \frac{\hat{q}_{n,k}^b}{\|\hat{q}_{n,k}^b\|} \quad (3.83)$$

não seria suficiente⁵? A resposta é sim. Contudo, [86] mostra que a abordagem de normalização em (3.83), batizada pelos autores de “Normalização por Força Bruta” (*Brute Force Normalization*), representa uma interferência externa no algoritmo de filtragem que se esteja usando ([86] utiliza uma variação do FKE) e deve ser levada em conta explicitamente nas equações do filtro para evitar divergência das estimativas, complicando-as desnecessariamente. Apesar do aumento da complexidade do cálculo de \hat{x}_k , [58] demonstra que (3.83) não altera a estimativa da matriz de covariâncias \hat{P}_k , assim como já havia sido citado anteriormente no final da Seção 3.4.

Bar-Itzhack et al. também analisam em [86] duas outras abordagens para o problema de normalização de quatérnios, a saber, a utilização de uma Pseudo-Medida de Quatérnio (QPM, do inglês *Quaternion Pseudo-Measurement*) ou uma Pseudo-Medida de Magnitude (MPM, do inglês *Magnitude Pseudo-Measurement*). O princípio destes métodos é o mesmo apresentado em (3.79), em que uma medida de um sensor fictício é usada para assegurar a obediência das estimativas à restrição imposta ao sistema. No caso do QPM, esta medida é dada por

$$q_k^{norm} = \frac{\hat{q}_{n,k}^b}{\|\hat{q}_{n,k}^b\|} + v_k^q, \quad v_k^q \sim N(0, R_k^q), \quad (3.84)$$

obtida a partir de (3.83) por meio do acréscimo de um termo de ruído v_k^q . Supõe-se em [86] que R_k^q tem a forma $R_k^q = \mathbb{I}_{4 \times 4} \delta^q$, em que δ^q é um número pequeno (da ordem de 10^{-5}).

⁵O sinal de atribuição := é o mesmo do Capítulo 2 e modifica o termo à esquerda apenas após a realização das operações à direita.

Para o MPM, a pseudo-medida é dada por

$$1 = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + v_k^{qu}, \quad v_k^{qu} \sim N(0, R_k^{qu}), \quad (3.85)$$

ou seja, o quadrado da norma Euclidiana do quatérnio acrescida de um termo de ruído em que, mais uma vez, $R_k^{qu} = \delta^{qu}$ é pequeno.

De acordo com a análise feita em [86], a normalização QPM usando (3.84) tem bom desempenho, pode ser naturalmente incorporada às equações do FKE e consegue normalizar a estimativa $\hat{q}_{n,k}^b$ satisfatoriamente, desde que δ^q seja corretamente ajustado. Caso isto não aconteça, a estimativa de atitude pode chegar a um valor incorreto e, dependendo da situação, até mesmo divergir. Os autores em [86] apontam como causa deste fato o desejo dos projetistas de escolher um valor δ^q muito pequeno, de forma a que a restrição de norma seja obedecida quase perfeitamente. Caso isso seja feito, o pequeno “ruído” de medição R_k^q em (3.84) diminui drasticamente a variância da estimativa de $\hat{q}_{n,k}^b$, fazendo com que ela seja praticamente substituída pelo quatérnio normalizado em (3.83) da estratégia de força bruta. Além disso, esta pequena variância de q_k^{norm} faz com que o filtro atribua uma confiança demasiada ao quatérnio normalizado, impedindo que novas medidas vetoriais corrijam a estimativa e mantendo $\hat{q}_{n,k}^b$ presa a um valor incorreto. Caso o quatérnio de atitude se modifique, a estimativa $\hat{q}_{n,k}^b$ divergirá. Para evitar este fenômeno, torna-se necessário ajustar precisamente o valor de δ^q , constituindo uma dificuldade adicional ao problema de filtragem.

A alternativa oferecida pela normalização MPM em (3.85) segue exatamente o mesmo princípio da QPM, mas agora a pseudo-medida representa uma restrição à norma do quatérnio, não ao valor particular de suas componentes. Dessa forma, escolher um valor muito pequeno para δ^{qu} , de forma a que a restrição de norma seja praticamente satisfeita, não implica uma diminuição da incerteza associada a $\hat{q}_{n,k}^b$, mas sim uma redução dos desvios de sua norma $\|\hat{q}_{n,k}^b\|$. Sendo assim, $\hat{q}_{n,k}^b$ continua a ser continuamente corrigida pelas novas medidas vetoriais, ao mesmo tempo em que (3.85) assegura a unidade de sua norma. Em virtude das vantagens apresentadas, a normalização MPM é adotada nas abordagens de filtragem sob restrição apresentadas no restante desta seção.

Diversos métodos de filtragem de sistemas não-lineares sob restrições estão disponíveis e uma revisão atual pode ser encontrada em [81, 82]. Em sua análise, [82] constatou que o *Moving Horizon Estimator* (MHE) proposto por [87] foi aquele que apresentou os menores erros de estimação, ao custo de uma dificuldade de implementação e de uma complexidade computacional muitas vezes superiores aos dos outros métodos revisados. Uma das abordagens mais promissoras para este tipo de problema está na utilização de variações do FKU para abarcar restrições como em (3.64), tendo em vista o bom desempenho deste filtro na estimação de estados de sistemas não-lineares sem um aumento significativo do tempo de computação do filtro [82]. Neste contexto, podem ser citados o *Equality-Constrained UKF* (ECUKF) e o *Measurement-Augmented UKF* (MAUKF) apresentados em [80], que são extensões não-lineares, baseadas no FKU, dos filtros propostos em [79] e discutidos na seção

anterior. O ECUKF implementa o análogo não-linear do passo de projeção de estimativas do ECKF, enquanto o MAUKF aumenta o vetor de medições à semelhança do MAKF em (3.79). Considerando a restrição de norma dos quatérnios

$$D^{r,qu}(x_k) = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = 1, \quad (3.86)$$

apresenta-se a seguir a utilidade destes filtros para o problema de estimação de quatérnios unitários, assim como feito em [80]:

- **Projeção de estimativas pelo ECUKF:** suponha que estejam disponíveis os conjuntos

$$\mathcal{X}_{k|k} = \{\chi_{k|k}^0, \chi_{k|k}^1, \dots, \chi_{k|k}^{n_x}\}, \quad \Gamma^{\mathcal{X}} = \{\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{n_x}\}, \quad n_x \in \mathbb{N}, \quad (3.87)$$

em que $\mathcal{X}_{k|k}$ é um conjunto de $n_x + 1$ pontos-sigma e $\Gamma^{\mathcal{X}}$ é o conjunto de pesos associados aos elementos de $\mathcal{X}_{k|k}$. Ambos os conjuntos em (3.87) são obtidos a partir das estimativas corrigidas \hat{x}_k e \hat{P}_k de um FKU no instante atual k , que estima os estados do sistema (3.81)-(3.82) sem levar em conta a restrição (3.64)⁶. A projeção da estimativa \hat{x}_k é feita a partir do cálculo de (3.73)-(3.77) por meio do conjunto de pontos-sigma transformados $\mathcal{D}_{k|k}^{r,qu}$ utilizando (3.86), em que

$$\mathcal{D}_{k|k}^{r,qu} = \{s_{k|k}^0, s_{k|k}^1, \dots, s_{k|k}^{n_x}\}, \quad s_{k|k}^i = D^{r,qu}(\chi_{k|k}^i), \quad i = 0, 1, \dots, n_x.$$

Logo, as estimativas projetadas \hat{x}_k^r e \hat{P}_k^r pelo ECUKF são dadas por

$$\begin{aligned} \hat{s}_k &= \sum_{i=0}^{n_x} \gamma^i (s_{k|k}^i), \\ P_k^s &= \sum_{i=0}^{n_x} \gamma^i (s_{k|k}^i - \hat{s}_k) (s_{k|k}^i - \hat{s}_k)^T, \\ P_k^{x,s} &= \sum_{i=0}^{n_x} \gamma^i (\chi_{k|k}^i - \hat{x}_k) (s_{k|k}^i - \hat{s}_k)^T, \\ K_k^s &= P_k^{x,s} (P_k^s)^{-1}, \\ \hat{x}_k^r &= \hat{x}_k + K_k^s (1 - \hat{s}_k), \\ \hat{P}_k^r &= \hat{P}_k - K_k^s P_k^s (K_k^s)^T. \end{aligned}$$

Realimentando \hat{x}_k^r e \hat{P}_k^r para o próximo passo do algoritmo do FKU (ver Apêndice A), tem-se o ECUKF.

- **Projeção de estimativas pelo MAUKF:** assim como foi feito em (3.79) para o caso de sistemas lineares, o MAUKF substitui (3.82) pelo modelo de saída aumentado

$$y_k^a = \begin{bmatrix} y_k \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x_k) \\ D^{r,qu}(x_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_k \\ v_k^s \end{bmatrix}, \quad v_k^s \sim N(0, R_k^s), \quad (3.88)$$

⁶Para detalhes sobre como é feito o cálculo de $\mathcal{X}_{k|k}$, $\Gamma^{\mathcal{X}}$ ou sobre os passos do FKU, recomenda-se a leitura do Apêndice A.

(3.89)

em que valem as mesmas considerações para o “ruído” R_k^s feitas para (3.80). Em seguida, o modelo aumentado (3.81) e (3.88) é usado normalmente nos passos do algoritmo do FKU, dando origem ao MAUKF.

Mesmo em face da utilidade e facilidade de implementação do ECUKF e do MAUKF como estimadores de estado capazes de satisfazer, ao menos aproximadamente, a restrição (3.86), optou-se pela adoção do FKE neste trabalho pelos motivos apresentados no final da Seção 3.6.1. Seguindo a estratégia de normalização MPM sugerida por [86] e adotada por [55], utilizou-se uma pseudo-medida de norma

$$1 = D^{r,qu}(x_k) + v_k^{qu} = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + v_k^{qu}, \quad v_k^{qu} \sim N(0, R_k^{qu}), \quad (3.90)$$

para procurar satisfazer (3.86), em que foi assumido um “ruído” de medição $R_k^{qu} = 10^{-10}$ sem significado físico a fim de evitar problemas de singularidade [55, 59, 86]. Mesmo a equação (3.90) não podendo garantir a norma unitária do quatérnio, ainda mais na presença de um relaxamento da restrição pela escolha $R_k^{qu} \neq 0$, o valor muito pequeno de R_k^{qu} foi o suficiente para manter a norma do quatérnio estimado \hat{q}_n^b praticamente igual à unidade sem, com isso, afetar a estabilidade do FKE.

A linearização de $D^{r,qu}(x_k)$ em (3.86) em torno da estimativa \hat{x}_k corrigida é dada por

$$J_D = \left. \frac{\partial D^{r,qu}(x_k)}{\partial x_k} \right|_{\hat{x}_k} = \begin{bmatrix} 2\hat{q}_0 & 2\hat{q}_1 & 2\hat{q}_2 & 2\hat{q}_3 & 0_{1 \times (n_x-4)} \end{bmatrix}. \quad (3.91)$$

De maneira análoga a (3.73)-(3.78), utiliza-se (3.91) para se obter as estimativas projetadas do vetor de estados

$$P_k^{qu} = J_D \hat{P}_k J_D^T + R_k^{qu}, \quad (3.92)$$

$$P_k^{x,qu} = \hat{P}_k J_D^T, \quad (3.93)$$

$$K_k^{qu} = P_k^{x,qu} (P_k^{qu})^{-1}, \quad (3.94)$$

$$\hat{x}_k^r = \hat{x}_k + K_k^{qu} \left(1 - \sum_{i=0}^3 \hat{q}_i^2 \right), \quad (3.95)$$

$$\hat{P}_k^r = (\mathbb{I} - K_k^{qu} J_D) \hat{P}_k (\mathbb{I} - K_k^{qu} J_D)^T + K_k^{qu} R_k^{qu} (K_k^{qu})^T. \quad (3.96)$$

Por fim, incorporam-se (3.92)-(3.96) ao algoritmo do sistema de localização para correta estimação do quatérnio de atitude.

3.6.4 Normalização de medidas vetoriais

A última questão abordada neste capítulo acerca da estimação de quatérnios diz respeito à sensibilidade do FKE a diferenças de norma entre os vetores em (3.37) e (3.41). A rigor, a

única informação pertinente em (3.37) e (3.41) para determinação de $C_{n,k}^b$ é a diferença entre as direções dos vetores medidos nos referenciais \mathbf{b} e \mathbf{n} . Em uma situação ideal de ausência de perturbações externas, seriam observadas as igualdades

$$\|f_k^b - b_k^a\| = \|g_E^n\|, \quad \|m_{mag,k}^b\| = \|m_E^n\|. \quad (3.97)$$

Neste caso, a validade de (3.97) permitiria normalizar (3.37) e (3.41), chegando-se ao sistema

$$\frac{m_{mag,k}^b}{\|m_E^n\|} = (C_{n,k}^b)^T \frac{m_E^n}{\|m_E^n\|} + \frac{\epsilon_{m,k}}{\|m_E^n\|}, \quad (3.98)$$

$$\frac{f_k^b - b_k^a}{\|g_E^n\|} \approx (C_{n,k}^b)^T \left(-\frac{g_E^n}{\|g_E^n\|} \right) + \frac{\epsilon_{f,k}}{\|g_E^n\|}, \quad (3.99)$$

em que os termos de perturbação

$$\epsilon_{m,k} \sim N(0, R_{\epsilon_{m,k}}), \quad \epsilon_{f,k} \sim N(0, R_{\epsilon_{f,k}})$$

em (3.37) e (3.41) seriam convertidos para

$$\frac{\epsilon_{m,k}}{\|m_E^n\|} \sim N\left(0, \frac{1}{\|m_E^n\|^2} R_{\epsilon_{m,k}}\right), \quad \frac{\epsilon_{f,k}}{\|g_E^n\|} \sim N\left(0, \frac{1}{\|g_E^n\|^2} R_{\epsilon_{f,k}}\right). \quad (3.100)$$

Contudo, distúrbios introduzidos pela movimentação do corpo e fontes de interferência eletromagnética não modeladas pelos termos $\epsilon \sim N(0, R_{\epsilon,k})$ impedem que (3.97) seja verificada, invalidando (3.98)-(3.99). De fato, a realização de testes do FKE com dados reais de sensores mostrou que, geralmente, existe uma diferença de norma significativa entre os vetores m_E^n e g_E^n e as suas medidas f_k^b e $m_{mag,k}^b$ correspondentes. Em alguns momentos, esta discrepância de normas entre os vetores medidos e os de referência era tal que as hipóteses de linearização local do FKE eram violadas, tornando o filtro instável [70]. Esta observação é um claro indicativo da sensibilidade da linearização de primeira ordem em (3.51)-(3.53) feita pelo FKE, em que as diferenças de norma entre os vetores atuam no sentido de distanciar as equações de medição de seu ponto central de linearização, degenerando fortemente a propagação das incertezas das estimativas [72].

A solução encontrada para melhorar a estabilidade do FKE foi normalizar m_E^n e g_E^n em (3.37) e (3.41), que são assumidos constantes, e normalizar as medidas f_k^b e $m_{mag,k}^b$ a partir de suas normas no k -ésimo instante amostral, ou seja,

$$\frac{m_{mag,k}^b}{\|m_{mag,k}^b\|} = (C_{n,k}^b)^T \frac{m_E^n}{\|m_E^n\|} + \tilde{\epsilon}_{m,k}, \quad (3.101)$$

$$\frac{f_k^b - b_k^a}{\|f_k^b - b_k^a\|} \approx (C_{n,k}^b)^T \left(-\frac{g_E^n}{\|g_E^n\|} \right) + \tilde{\epsilon}_{f,k}. \quad (3.102)$$

Utilizar (3.101) e (3.102) no lugar de (3.37) e (3.41), respectivamente, tem, entretanto, implicações não-triviais na distribuição dos novos termos de ruído $\tilde{\epsilon}_{m,k}$ e $\tilde{\epsilon}_{f,k}$. Diferentemente de (3.98)-(3.99), em que todos os termos das equações são divididos por grandezas

constantes e iguais, a normalização em (3.101)-(3.102) não permite que as incertezas associadas a $\tilde{\epsilon}_{m,k}$ e $\tilde{\epsilon}_{f,k}$ sejam obtidas de maneira tão fácil como em (3.100). De fato, a normalização das medidas dos sensores, como feito em (3.101)-(3.102), torna os distúrbios $\tilde{\epsilon}_{m,k}$ e $\tilde{\epsilon}_{f,k}$ anisotrópicos, impedindo que se suponha matrizes de covariâncias na forma $R_{\epsilon,k} = \mathbb{I}_{3 \times 3} \tilde{\delta}^{mag}$, em que $\tilde{\delta}^{mag}$ é um termo de variância comum a todas as componentes do magnetômetro normalizado [59]. Em razão disso, as matrizes relacionadas a $\tilde{\epsilon}_{m,k}$ e $\tilde{\epsilon}_{f,k}$ tiveram que ser ajustadas manualmente a fim de encontrar os menores valores para seus elementos que superestimasse as incertezas de (3.101)-(3.102), evitando estimativas inconsistentes. Todavia, esta superestimação tem o efeito negativo de gerar perda de desempenho do sistema de localização, uma vez que ela diminui o poder de correção da estimativa de q_n^b por meio das medidas do magnetômetro e do acelerômetro. Ademais, remover a informação da norma dos vetores torna mais difícil detectar falhas do magnetômetro, algo que influenciou os resultados experimentais da Seção 5.3.

Apesar dos aspectos negativos ressaltados, a abordagem de normalização em (3.101)-(3.102) é recomendada e mostrou-se fundamental para a correta operação dos estimadores de estado do sistema de localização, principalmente quando se estava operando com dados reais de sensores, uma vez que a mitigação das diferenças de norma entre os vetores atua no sentido de evitar a divergência dos filtros.

4 ABORDAGENS HÍBRIDAS DESENVOLVIDAS

“None of my inventions came by accident. I see a worthwhile need to be met and I make trial after trial until it comes. What it boils down to is one per cent inspiration and ninety-nine per cent perspiration.”

Thomas Edison

4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo representa o cerne da dissertação, onde são apresentados três novos filtros estocásticos para sistemas a múltiplos modelos (HDFF, MHMF e MHMF-2) e as inovações que trazem em seus algoritmos. A fundamentação teórica do Capítulo 2, juntamente com o Apêndice A, e o sistema de localização do Capítulo 3 servem para dar embasamento teórico a este capítulo e apresentar uma possível aplicação prática para seus resultados. O Capítulo 5, por sua vez, utiliza o sistema de localização descrito no Capítulo 3 como plataforma experimental para comparar os algoritmos propostos neste capítulo com aqueles do Capítulo 2 em situações reais e simuladas.

A seqüência dos resultados aqui apresentados segue a ordem cronológica de seu desenvolvimento, tornando fácil perceber como trabalhos posteriores encontraram seus alicerces naqueles que os antecederam. A primeira experiência envolvendo filtragem estocástica, sistemas híbridos e robótica móvel ocorreu durante o desenvolvimento e proposição do *Hybrid Data Fusion Filter* (HDFF) [43]. Este artigo mostrou a utilidade do paradigma de modelagem de sistemas híbridos para aplicações em robótica móvel e serviu de estopim motivador para os trabalhos seguintes. O próximo passo se deu no sentido de propor algoritmos de filtragem para sistemas híbridos capazes de melhor representar as complexas distribuições de probabilidade envolvidas no problema de filtragem deste tipo de sistema. A consequência deste esforço foi a proposição do *Multiple Hypotheses Mixing Filter* (MHMF) [88], que generaliza o largamente conhecido e utilizado IMM e apresenta ganhos de desempenho em relação a este último em termos da diminuição dos erros de estimação e redução da carga computacional. Contudo, a avaliação continuada do MHMF em diversos tipos de aplicação e situações mostrou que, algumas vezes, este filtro sofria dos mesmos problemas de estabilidade de estimativas encontrados em outros algoritmos disponíveis na literatura. As tentativas de se solucionar este problema levaram ao desenvolvimento de uma nova versão do MHMF, o MHMF-2, que manteve os ganhos de desempenho de seus antecessores e mostrou-se estável em todos os testes realizados até o momento, devendo ser considerado o principal resultado deste trabalho.

Uma vez que todos os algoritmos deste capítulo dizem respeito a filtros genéricos não-

lineares, não é possível realizar uma análise geral de suas convergências. No contexto de sistemas não-lineares, este tipo de verificação é factível apenas por meio de funções de Lyapunov candidatas, que são adequadas apenas para casos específicos e não necessariamente buscam reduzir variâncias, não sendo, portanto, apropriadas.

4.2 ABORDAGEM HÍBRIDA PARA O PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO

Antes da apresentação dos principais resultados do trabalho, esta seção retoma o modelamento de sistemas híbrido das Seções 2.2.1.1 (sistemas lineares com saltos Markovianos) e 2.2.2.1 (sistemas não-lineares com saltos Markovianos e ruídos aditivos de processo e de medição) e procura torná-los mais gerais. Além disso, um tratamento mais detalhado do que o do Capítulo 2 é dado a alguns aspectos envolvidos na filtragem estocástica de sistemas híbridos. A discussão feita no Apêndice A a respeito de estimação de estados para sistemas lineares e não-lineares pode auxiliar a compreensão dos resultados deste e do próximo capítulo.

Um sistema híbrido [5] a tempo discreto combinando variáveis de estado contínuas e discretas pode ser descrito como

$$x_k = f_{m_{k-1}}(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}), \quad (4.1)$$

$$y_k = h_{m_k}(x_k, v_k), \quad (4.2)$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados contínuos; $m_k \in \mathbb{M} \triangleq \{1, 2, \dots, M\}$ é o estado discreto do sistema (modo), podendo assumir M diferentes valores; $f_{m_{k-1}} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é uma função de evolução do processo possivelmente não-linear e dependente do modo; $h_{m_k} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ e $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ são, respectivamente, a função de medição e o vetor de medições; $u_{k-1} \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entrada; e $v_k \in \mathbb{R}^{n_v}$ e $w_{k-1} \in \mathbb{R}^{n_w}$ são processos de ruído. O modo discreto m_k define em (4.1)-(4.2) um conjunto de M diferentes funções $f_{m_{k-1}}$ e h_{m_k} em espaço de estados para descrever a dinâmica do sistema.

Além de se ter um modelo dinâmico para cada modo de operação do sistema, é também necessário descrever-se a maneira pela qual se dão as transições entre estes diferentes estados discretos. Dentre seus algoritmos MM, [84] apresenta o caso estático em que muitos modos são considerados, mas não ocorrem transições entre eles. Este modelamento, denominado de Modelos Múltiplos Autônomos (AMM, do inglês *Autonomous Multiple Models*) e já referido na Figura 2.1(a) do Capítulo 2, é útil quando se quer escolher o modelo matemático mais adequado para o comportamento de um sistema dentre várias opções possíveis, mas sem que se tenha certeza sobre nenhuma delas. Contudo, sistemas dinâmicos reais muitas vezes apresentam características variantes no tempo que são melhor descritas por meio de modelos chaveados, assim como na Figura 2.1(b). Neste contexto, [14, 89] assumem que as probabilidades de transição entre os modos dependem do estado contínuo do sistema, enquanto que em [90] as transições entre modos são disparadas quando o estado contínuo

atinge condições de guarda específicas, assim como detalhado no Capítulo 2. Juntamente com este tipo de transições entre modos dependentes do estado, o modelo Markoviano adotado em, por exemplo, [7,9,12], tem sido largamente utilizado. Neste caso, as probabilidades de transição entre os modos dependem apenas do modo atual do sistema e ocorrem de acordo com uma MPT, que pode variar com o tempo. Apesar da simplicidade, assumir que as transições entre modos ocorrem segundo uma CM é muitas vezes uma boa aproximação para aplicações MM tais como rastreamento de alvos, detecção de falhas e outras situações em que a definição de parâmetros de transição dependentes do estado é uma tarefa difícil. Todavia, uma grande desvantagem associada ao modelamento das transições por meio de uma CM é a hipótese comum, porém geralmente irreal, de conhecimento *a priori* da MPT [19]. Dito isso, assume-se que a variável m_k segue uma CM com vetor inicial de probabilidades possivelmente desconhecido $p(m_0)$ e MPT também possivelmente desconhecida

$$\Pi_k = \{\pi_{i,j}\}, \pi_{i,j} = \Pr\{m_k=j|m_{k-1} = i\}, i, j \in \mathbb{M}, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

No caso especial de AMM abordado em [84], $\Pi_k = \Pi = \mathbb{I}_{M \times M}$, ou seja, a MPT é constante, absolutamente conhecida e igual à matriz identidade. A Figura 4.1 ilustra uma CM genérica com probabilidades de transição $\pi_{i,j}$ dependentes apenas do modo atual.

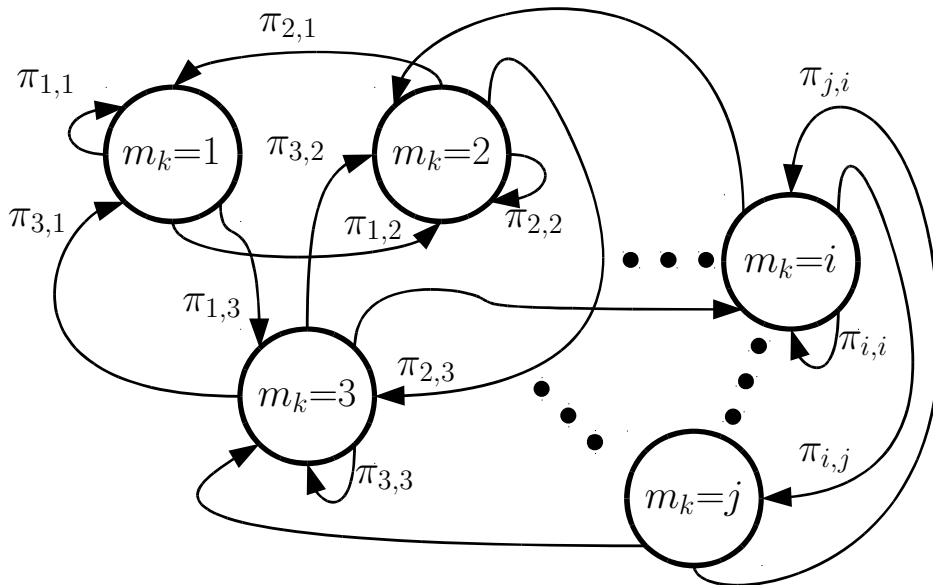


Figura 4.1: Cadeia de Markov e suas probabilidades de transição.

Uma vez que (4.1) e (4.2) tenham sido definidas para cada modo do sistema e as transições entre os modos tenham sido modeladas, o próximo passo na filtragem de sistemas híbridos é obter, baseado em uma seqüência $y_{1:k} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ de medidas corrompidas por ruído geradas de acordo com (4.2), a função densidade de probabilidade (f.d.p.) *a posteriori* conjunta de x_k e m_k dada por

$$p(x_k, m_k | y_{1:k}) = p(x_k | m_k, y_{1:k}) \Pr(m_k | y_{1:k}), \quad (4.4)$$

em que ambos x_k e m_k podem não ser diretamente mensuráveis. Ainda que estimar esta f.d.p. seja normalmente uma tarefa difícil, (4.4) mostra que ela pode ser encarada como

dois problemas separados: estimar a f.d.p. *a posteriori* $p(x_k|m_k, y_{1:k})$ de x_k condicional ao modo; e estimar a probabilidade condicional modal discreta $\Pr(m_k|y_{1:k})$ independente de x_k . Quando tratada separadamente, obter a probabilidade condicional modal discreta $\Pr(m_k|y_{1:k})$ é uma simples consequência do Teorema de Bayes, dado que

$$\Pr(m_k|y_{1:k}) = \frac{p(y_k|m_k, y_{1:k-1}) \Pr(m_k|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})}. \quad (4.5)$$

É necessário reconhecer que, à primeira vista, (4.5) pode não parecer uma “simples” consequência de coisa alguma, mas o significado de cada um de seus termos é bastante intuitivo. Em primeiro lugar, analisemos o termo $p(y_k|m_k, y_{1:k-1})$. Nesta equação, o modo m_k é dado, ou seja, assume-se que ele seja completamente conhecido. Por conseguinte, esta f.d.p. nada mais é que a verossimilhança da medida y_k assumindo que um modo m_k específico esteja em vigor. A expressão desta verossimilhança pode ser tornada tão difícil quanto se queira dependendo de como a função de medição h_{m_k} for escolhida. Contudo, é prática largamente difundida nos trabalhos científicos da área, incluindo esta dissertação, reescrever as funções de medição em cada modo no formato

$$h_{m_k}(x_k, v_k) = h'_{m_k}(x_k) + v_k, \quad (4.6)$$

em que toda a dependência do estado fica concentrada na nova função $h'_{m_k}(x_k)$ e o ruído de medição torna-se apenas um termo aditivo. Além disso, se v_k for suposto Gaussiano em (4.6), a verossimilhança $p(y_k|m_k, y_{1:k-1})$ torna-se a mais do que conhecida expressão da f.d.p. exponencial Normal.

Em termos menos formais, a verossimilhança de y_k é uma medida de quão próxima esta medição experimental está do valor predito da saída do sistema usando a informação de modelo matemático contida em (4.1) e (4.2). Além do modo no instante atual m_k , a f.d.p. $p(y_k|m_k, y_{1:k-1})$ diz que são dadas apenas as medições $y_{1:k-1}$ até o instante anterior de amostragem, o que exclui a amostra atual da saída do sistema. Dessa forma, a melhor estimativa de estado que se pode ter no instante atual para o cálculo da verossimilhança de y_k é aquela predita pelo modelo de evolução de estado em (4.1), aqui chamada de \bar{x}_k . Alguns métodos para o cálculo dessa estimativa predita $\bar{x}_k = E\{x_k|y_{1:k-1}\}$ são dados no Apêndice A a respeito de filtragem estocástica não-linear. Uma vez que se tenha \bar{x}_k e sabendo que m_k é dado, pode-se escolher a função de medição (4.2) apropriada e calcular-se a saída predita

$$\bar{y}_k = h_{m_k}(\bar{x}_k, E\{v_k\}). \quad (4.7)$$

Se a função de medição é escrita como em (4.6) e o ruído de medição v_k é suposto Gaussiano de média nula, $v_k \sim N(0, R_{v_k})$, (4.7) simplifica-se para

$$\bar{y}_k = h'_{m_k}(\bar{x}_k) + 0 = h'_{m_k}(\bar{x}_k). \quad (4.8)$$

A distância

$$\vartheta = y_k - \bar{y}_k \quad (4.9)$$

entre a saída atual e a saída predita do sistema é chamada termo de inovação, cujo valor praticamente nunca é 0 (zero) em razão do efeito conjunto de erros de modelagem e ruídos dos sensores. Para que se possa avaliar a adequação do modo m_k em prever a saída y_k atual, é necessário que se saiba qual é a incerteza Σ_ϑ associada à diferença em (4.9). Por exemplo, se Σ_ϑ for “grande” (termos da matriz de covariâncias indicando grandes dispersões em torno dos valores médios), até mesmo uma grande diferença em (4.9) pode ser considerada razoável. Se, pelo contrário, Σ_ϑ for “pequena”, um termo de inovação de grande magnitude indicará que o modelo m_k dado não é capaz de prever corretamente \bar{y}_k , levando-se a crer que talvez outro modo do sistema esteja em vigor. Estimar Σ_ϑ é geralmente uma tarefa difícil para funções $h'_{m_k}(x_k)$ não-lineares, visto que a propagação de incertezas dos argumentos para a saída da função muitas vezes não tem forma fechada. À semelhança do previamente mostrado na Seção 2.2.2.2, no caso em que $h'_{m_k}(x_k)$ é linear ou quando se está utilizando um filtro estocástico baseado em linearização (FKE, por exemplo), a propagação de incertezas é feita por meio da equação

$$\Sigma_\vartheta = \left(\frac{\partial h'_{m_k}(x_k)}{\partial x_k} \Big|_{\bar{x}_k} \right) \bar{P}_k \left(\frac{\partial h'_{m_k}(x_k)}{\partial x_k} \Big|_{\bar{x}_k} \right)^T + R_{v_k},$$

em que $\partial h'_{m_k}(x_k)/\partial x_k$ é a matriz Jacobiana da função de medição avaliada na estimativa predita de estado \bar{x}_k e \bar{P}_k é a matriz de covariâncias associada a esta estimativa. No caso particular em que $h'_{m_k}(x_k) = C_{m_k}$, ou seja, a função de medição é linear, tem-se a equivalência

$$\frac{\partial h'_{m_k}(x_k)}{\partial x_k} = C_{m_k}.$$

Maiores detalhes sobre métodos de filtragem não-linear e suas equações são dados no Apêndice A.

Seguindo a notação introduzida no início desta seção e denotando a dimensão do vetor de saída associado a $h_{m_k}(x_k, v_k)$ por n_y , a expressão fechada para a verossimilhança de y_k no caso em que v_k é Gaussiano [46] é dada por

$$p(y_k | m_k, y_{1:k-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_y}{2}} \det(\Sigma_\vartheta)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vartheta)^T \Sigma_\vartheta^{-1} (\vartheta) \right\}. \quad (4.10)$$

O próximo termo de (4.5) a ser detalhado é a probabilidade modal discreta $\Pr(m_k | y_{1:k-1})$. Assim como o termo de verossimilhança analisado anteriormente, esta probabilidade modal assume que apenas as medições $y_{1:k-1}$ até o instante anterior de amostragem são dadas. Portanto, para que se possa ter uma estimativa da probabilidade modal do sistema m_k no instante atual, utilizando-se apenas informações sensoriais do último passo, recorre-se ao modelo matemático em (4.3) para as transições entre modos em uma CM. Uma vez que as probabilidades de transição em (4.3) dependem apenas do modo atual do sistema, o cálculo

de $\Pr(m_k|y_{1:k-1})$ necessita apenas de Π_{k-1} , a MPT do instante anterior, e de

$$p(m_{k-1}) = [\Pr(m_{k-1}=1|y_{1:k-1}), \Pr(m_{k-1}=2|y_{1:k-1}), \dots, \Pr(m_{k-1}=M|y_{1:k-1})]^T,$$

o vetor de probabilidades dos modos no instante anterior. Denotando por

$$\bar{p}(m_{k-1}) = [\Pr(m_k=1|y_{1:k-1}), \Pr(m_k=2|y_{1:k-1}), \dots, \Pr(m_k=M|y_{1:k-1})]^T$$

o vetor de probabilidades previstas dos modos no instante atual utilizando apenas dados do instante anterior, tem-se a igualdade

$$\bar{p}(m_{k-1}) = (\Pi_{k-1})^T p(m_{k-1}), \quad (4.11)$$

que permite calcular de uma só vez todos os termos $\Pr(m_k|y_{1:k-1})$ a partir dos valores conhecidos de Π_{k-1} e $p(m_{k-1})$. Por fim, o valor de $p(y_k|y_{1:k-1})$ é independente tanto de x_k quanto de m_k e pode ser excluído da análise. De fato, este termo atua apenas como um fator constante multiplicando todas as probabilidades dos modos, podendo ser facilmente cancelado por uma processo de normalização das probabilidades. Para vê-lo, considere a notação

$$\Pr(m_k|y_{1:k}) = \frac{\rho(m_k)}{c},$$

em que $\rho(m_k)$ pode ser calculado a partir de (4.10) e (4.11) e $c = p(y_k|y_{1:k-1})$. Dada a restrição $\sum_{i=1}^M \Pr(m_k = i|y_{1:k}) = 1$, tem-se

$$\sum_{i=1}^M \rho(m_k=i) = \sum_{i=1}^M \Pr(m_k = i|y_{1:k})c = c \underbrace{\sum_{i=1}^M \Pr(m_k = i|y_{1:k})}_1 = c.$$

Logo,

$$\frac{\rho(m_k=i)}{\sum_{j=1}^M \rho(m_k=j)} = \frac{\Pr(m_k = i|y_{1:k})c}{c} = \Pr(m_k = i|y_{1:k}), \quad (4.12)$$

em que (4.12) fornece uma maneira de se calcular as diferentes probabilidades $\Pr(m_k|y_{1:k})$ a partir de (4.10) e (4.11) apenas.

O tratamento de $p(x_k|m_k, y_{1:k})$ é uma questão mais delicada. No caso específico em que $M = 1$, i.e., o sistema tem apenas um modo de operação, as funções em (4.1)-(4.2) são lineares e os ruídos são brancos, Gaussianos e descorrelacionados, pode-se mostrar que a f.d.p. *a posteriori* $p(x_k|m_k, y_{1:k})$ é Gaussiana e o FK é o estimador ótimo. Contudo, basta que se faça $M > 1$ para que $p(x_k|m_k, y_{1:k})$ se torne uma complexa soma de Gaussianas, acabando com a otimalidade do FK. A estratégia do IMM abordada nas Seções 2.2.1.3 e 4.2.1 aproxima as densidades de probabilidade por Gaussianas, permitindo que estimadores de estado baseados em filtragem de Kalman sejam utilizados. Uma alternativa mais geral a este método é proposta na Seção 4.4.1, em que as densidades são representadas por somas

de Gaussianas no lugar de apenas uma delas. Além do FK e suas variantes, outra alternativa é utilizar métodos baseados em simulação, como as aplicações de filtros de partículas referenciadas na Seção 2.2.1. Infelizmente, o problema de reconstruir-se $p(x_k|m_k, y_{1:k})$ de maneira exata é computacionalmente infactível caso o sistema transite continuamente entre seus modos de operação, assim como discutido nas Seções 2.2.1.3 e 4.2.1. Portanto, é imprescindível que uma estratégia de aproximação dessa f.d.p. seja adotada de forma a que se possa realizar a estimação de estados do sistema (4.1)-(4.2) em tempo real. Uma vez escolhida a aproximação, a f.d.p. $p(x_k|m_k, y_{1:k})$ pode ser determinada por meio de estimadores tradicionais sabendo-se que o modo atual m_k , e conseqüentemente o modelo atual de espaço de estados, é dado.

Tendo em vista o acima descrito e considerando o sistema híbrido com MPT desconhecida descrito em (4.1)-(4.2), deseja-se obter

- \hat{x}_k , o vetor de estado estimado de mínima variância associado à matriz \hat{P}_k de covariâncias do erro de estimação;
- $\hat{p}(m_k)$, o vetor estimado de probabilidade dos modos;
- $\hat{\Pi}_k$, a MPT estimada;

baseado em uma seqüência de medidas perturbadas $y_{1:k}$ e estimativas iniciais $\hat{x}_0, \hat{P}_0, \hat{p}(m_0)$ e $\hat{\Pi}_0$.

4.2.1 Métodos clássicos para tratamento de múltiplas hipóteses

As transições aleatórias entre modos que ocorrem entre instantes de amostragem definem a seqüência de modos real

$$H_k = \{m_1, m_2, \dots, m_k\} \quad (4.13)$$

para o sistema Markoviano chaveado (4.1)-(4.2). Supondo que o modo do sistema não seja diretamente observável a cada instante e que, portanto, as transições entre modos ocorram de maneira desconhecida, tem-se o conjunto

$$\Omega_k = \{H_k^{(i)} | i = 1, 2, \dots, M^k\} \quad (4.14)$$

de todas as possíveis seqüências de modos, ou também chamadas hipóteses, até o k -ésimo instante de amostragem, em que $H_k^{(i)}$ denota a i -ésima hipótese. À medida em que k cresce com o tempo, o número de hipóteses em (4.14) aumenta exponencialmente. No caso em que todas as funções f_{m_k} e h_{m_k} são lineares, a MPT é conhecida e os processos de ruído são Gaussianos, deriva-se em [15] o estimador ótimo para (4.1)-(4.2) no sentido de mínimos quadrados, que é dado por

$$\tilde{x}_k = \sum_{j=1}^{M^k} \tilde{x}_k^{(j)} \Pr(H_k^{(j)} | y_{1:k}), \quad (4.15)$$

em que $\tilde{x}_k^{(j)} = E\{x_k | H_k^{(j)}, y_{1:k}\}$ é a estimativa de estado dada por um Filtro de Kalman (FK) seguindo a hipótese $H_k^{(j)}$. Entretanto, o crescimento exponencial do número de hipóteses em (4.15) torna a implementação deste estimador impossível na prática, dado que os requisitos de memória e capacidade computacional são ilimitados. Procurando contornar esta inexorável explosão no número de hipóteses, que advém do desconhecimento acerca das transições entre os modos do sistema, abordagens subótimas utilizando métodos de gerenciamento de hipóteses, tais como a fusão de hipóteses similares e a eliminação daquelas que são improváveis, tornam-se necessárias de forma a que se possa implementar estimadores MM em tempo real. Em [12–15] e referências, alguns algoritmos de filtragem com diferentes estratégias para o tratamento de múltiplas hipóteses são mostrados. Dentre os mais importantes, estão os filtros *Generalized Pseudo Bayes (GPB)* [15] e *Interacting Multiple Model (IMM)* [12], que lidam com a fusão de hipóteses de maneira distinta. O primeiro realiza uma combinação ponderada de hipóteses baseada em suas probabilidades após um número fixo de passos, enquanto que o segundo executa uma combinação das estimativas do passo anterior de forma a gerar novas estimativas iniciais para o seu banco de FK a cada instante de tempo. Em razão deste passo de “mistura” de estimativas, o IMM exige requisitos computacionais comparáveis aos do GPB1, que são lineares em relação ao tamanho do problema (número de modos), enquanto que o seu desempenho é praticamente igual ao do GPB2, que apresenta complexidade quadrática, tornando o IMM uma das melhores alternativas em termos de custo e eficiência computacionais [9]. Todavia, a abordagem de fusão de estimativas do IMM tem profundidade $d = 1$ fixa, podendo ser uma restrição muito forte em algumas situações. Para vê-lo, considere as equações

$$\Pr(m_k=i|y_{1:k-1}) = \sum_{j=1}^M \pi_{j,i} \Pr(m_{k-1}=j|y_{1:k-1}),$$

$$p(x_{k-1}|m_k=i, y_{1:k-1}) = \frac{\sum_{j=1}^M \pi_{j,i} \Pr(m_{k-1}=j|y_{1:k-1}) g_{k-1}(j)}{\Pr(m_k=i|y_{1:k-1})}, \quad (4.16)$$

$$g_{k-1}(j) = p(x_{k-1}|m_{k-1} = j, y_{1:k-1}), \quad (4.17)$$

para o passo de mistura de estimativas do IMM. Assim, como discutido na Seção 2.2.1.3, mesmo se $p(x_0)$ for Gaussiana, (4.17) é, em geral, uma soma de M^{k-1} Gaussianas ponderadas. Contudo, a abordagem de fusão do IMM assume que

$$p(x_{k-1}|m_{k-1} = i, y_{1:k-1}) \sim N(\hat{x}_{k-1}^{(i)}, \hat{P}_{k-1}^{(i)}), \quad (4.18)$$

em que $\hat{x}_{k-1}^{(i)}$ e $\hat{P}_{k-1}^{(i)}$ são, respectivamente, a estimativa de estado e sua matriz de covariâncias associada geradas por um FK seguindo o modo $m_{k-1} = i$. Ainda que aproximar a f.d.p. *a priori* da estimativa de estado por uma única Gaussiana centrada na estimativa do passo anterior em (4.18) seja freqüentemente razoável para sistemas híbridos lineares com um pequeno número de modos, isto pode não ocorrer quando o número de hipóteses sendo seguidas é grande ou para sistemas não-lineares em que a aproximação de ruído Gaussiano não é muito adequada. Uma proposta de solução para este problema é feita na Seção 4.4.1.

4.3 HYBRID DATA FUSION FILTER (HDFF): SISTEMAS HÍBRIDOS E ROBÓTICA MÓVEL

Em situações normais de operação em que as equações do modelo são válidas, o FKE e o FKU encontram-se entre as soluções de filtragem mais comumente adotadas para problemas de filtragem não-linear [91]. Filtragem de partículas é outra alternativa comum para se lidar com não-linearidades [7, 48], normalmente permitindo a consideração de ruídos não-Gaussianos. Porém, robôs operando em ambientes externos algumas vezes experimentam fortes distúrbios, impedindo que filtros tradicionais estimem adequadamente o vetor de estados do sistema ao longo do tempo. Estas perturbações incluem interferências externas nos sinais elétricos, falhas temporárias e permanentes dos sensores, modificações da estrutura física e qualquer outra forma de distúrbio que não possa ser modelada apenas pela adição de um termo de ruído ϵ .

Dentre as equipes de trabalho do Laboratório de Automação e Robótica (LARA), uma delas desenvolve o projeto de um VANT para inspeção de linhas aéreas de transmissão de energia elétrica, assim como descrito na Seção 3.2. Visto que o ambiente de operação do robô é hostil, há interesse na busca por métodos de localização utilizando os sensores embarcados na aeronave que sejam robustos a perturbações externas. Neste contexto, a contribuição do trabalho que propôs o HDFF [43] reside na descrição do problema de fusão de dados para sistemas fortemente perturbados por meio do paradigma de modelagem híbrida [6]. Devido à grande interferência magnética gerada pelas linhas de transmissão e falhas ocasionais dos sensores, os filtros estocásticos tradicionais testados primeiramente como estimadores de estado não foram capazes de gerar informações confiáveis. Em lugar de reestruturar-se a instrumentação da aeronave, levando a um aumento de custos e atrasos no projeto, a solução para lidar-se com perturbações do ambiente foi o desenvolvimento de um filtro robusto para localização capaz de tratar medidas fortemente corrompidas, tornando-o capaz de realizar a estimação de estados do VANT em condições em que outros filtros falharam.

4.3.1 Algoritmo

Voltando a (4.4) e sabendo que o modo m_k do sistema está restrito a um conjunto de M valores discretos, o Teorema da Probabilidade Total permite que se escreva

$$p(x_k, m_k | y_{1:k}) = \sum_{i=1}^M p(x_k | m_k = i, y_{1:k}) \Pr(m_k = i | y_{1:k}), \quad (4.19)$$

ou seja, estimar (4.19) para o sistema híbrido descrito por (4.1)-(4.2) consiste em combinar as estimativas de múltiplos filtros seguindo os modos das diferentes hipóteses do sistema. Ademais, é também necessário estimar o vetor de probabilidade dos modos

$$p(m_k) = [\Pr(m_k = 1), \Pr(m_k = 2) \dots \Pr(m_k = M)]^T$$

de forma a ponderar as estimativas dos filtros de acordo com a probabilidade de suas saídas estarem corretas.

Reforçando aquilo que foi dito na Seção 4.2.1, no contexto de estimação de múltiplos modelos, o algoritmo IMM exhibe requisitos computacionais que crescem de forma aproximadamente linear com a complexidade do problema (número de modos), enquanto que seu desempenho é próximo daquele de algoritmos de complexidade quadrática, tornando o IMM uma das melhores opções em termos de custo e eficiência [9]. Por esta razão, este algoritmo foi inicialmente escolhido para realizar a estimação de estados do sistema de localização do VANT. Contudo, o IMM assume que a MPT que rege as transições entre os modos do sistema é previamente conhecida, o que é raramente verdade [19]. Dadas as dificuldades que se estava enfrentando para ajustar adequadamente os valores da MPT, optou-se por incorporar às equações do IMM introduzidas por [12, 16] o algoritmo de estimação da MPT da Seção 2.3, dando origem ao HDFF ilustrado na Figura 4.2. Além de \hat{x}_k e $\hat{p}(m_k)$, esse algoritmo é capaz de estimar recursivamente $\hat{\Pi}_k$ baseado apenas nas medições ruidosas de saída dos sensores.

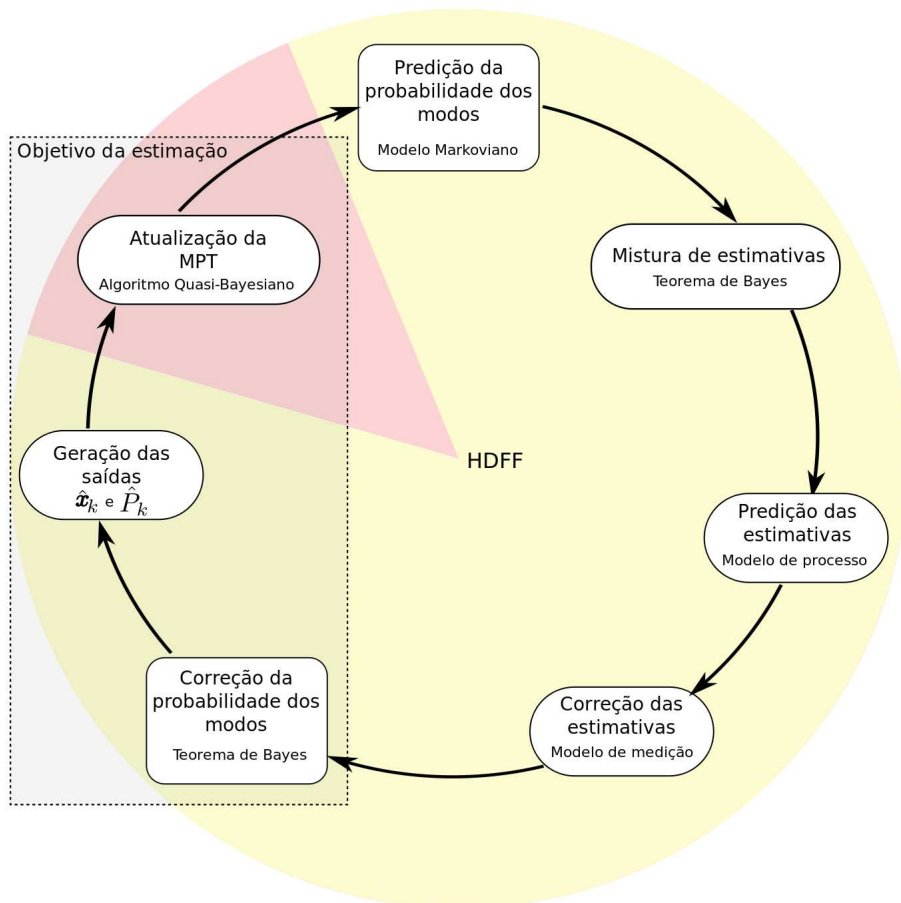


Figura 4.2: Diagrama do algoritmo do filtro HDFF.

HDFF (Hybrid Data Fusion Filter) [43]

Sejam $\hat{x}_k^{(i)}$ e $\hat{P}_k^{(i)}$, $i \in \{1, 2, \dots, M\}$, o vetor de estados e sua matriz de covariâncias asso-

ciada correspondendo ao filtro seguindo o modo $m_k = i$ no k -ésimo instante amostral. Seja também y_k o vetor atual de saída do sistema. Definindo

$$\hat{p}^{(i)}(m_k) = \Pr(m_k = i | y_{1:k})$$

e assumindo condições iniciais

$$\hat{p}^{(i)}(m_0), \hat{x}_0^{(i)}, \hat{P}_0^{(i)}, \hat{\Pi}_0, i \in \{1, 2, \dots, M\},$$

o algoritmo de fusão híbrida de dados é dado pelos seguintes passos:

i Predição das probabilidades dos modos

$$\bar{p}^{(i)}(m_k) = \sum_{j=1}^M \hat{\pi}_{j,i}(k-1) \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}),$$

ii Mistura das estimativas

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k-1}^{(i)} &= \sum_{j=1}^M \frac{\hat{\pi}_{j,i}(k-1) \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) \hat{x}_{k-1}^{(j)}}{\bar{p}^{(i)}(m_k)}, \\ \underline{P}_{k-1}^{(i)} &= \sum_{j=1}^M \frac{\hat{\pi}_{j,i}(k-1) \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) \left[\hat{P}_{k-1}^{(j)} + \delta(i, j) \right]}{\bar{p}^{(i)}(m_k)}, \\ \delta(i, j) &= \left(\hat{x}_{k-1}^{(j)} - \underline{x}_{k-1}^{(i)} \right) \left(\hat{x}_{k-1}^{(j)} - \underline{x}_{k-1}^{(i)} \right)^T, \end{aligned}$$

iii Predição das estimativas

$$\left(\underline{x}_{k-1}^{(i)}, \underline{P}_{k-1}^{(i)} \right) \xrightarrow{\text{Predição}} \left(\bar{x}_k^{(i)}, \bar{P}_k^{(i)} \right), \quad (4.20)$$

iv Correção das estimativas

$$\left(\bar{x}_k^{(i)}, \bar{P}_k^{(i)} \right) \xrightarrow{\text{Correção}} \left(\hat{x}_k^{(i)}, \hat{P}_k^{(i)} \right), \quad (4.21)$$

v Correção das probabilidades dos modos

$$\hat{p}^{(i)}(m_k) = \frac{p(y_k | m_k = i, \hat{\Pi}_{k-1}, y_{1:k-1}) \bar{p}^{(i)}(m_k)}{c_i}, \text{ em que } c_i \text{ não precisa ser calculado,} \quad (4.22)$$

$$\gamma_p = \sum_{j=1}^M \hat{p}^{(j)}(m_k),$$

$$\hat{p}(m_k) = [\hat{p}^{(1)}(m_k), \dots, \hat{p}^{(M)}(m_k)]^T \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_p \end{pmatrix},$$

vi Geração das saídas

$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^M \hat{p}^{(i)}(m_k) \hat{x}_k^{(i)},$$
$$\hat{P}_k = \sum_{i=1}^M \hat{p}^{(i)}(m_k) \left[\hat{P}_k^{(i)} + \left(\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k \right) \left(\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k \right)^T \right].$$

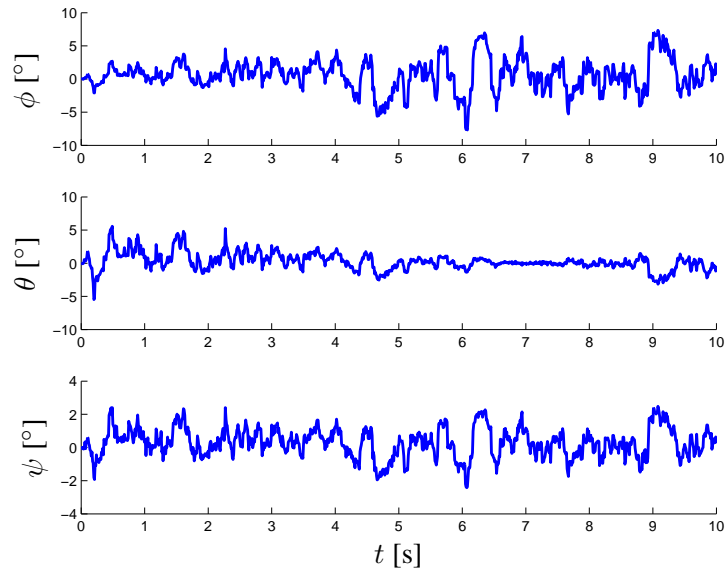
vii **Atualização da MPT:** $\hat{\Pi}_{k-1} \xrightarrow{\text{Seção 2.3}} \hat{\Pi}_k$.

Não são dados detalhes acerca de (4.20)-(4.22) pois estes passos variam dependendo do filtro escolhido para seguir cada um dos modos do sistema. Por exemplo, se (4.1)-(4.2) são lineares e perturbadas por ruído aditivo Gaussiano, o FK é uma escolha adequada e (4.20)-(4.21) tornam-se as equações dos passos *iii* e *iv* do IMM na Seção 2.2.1.2. O mesmo acontece com (4.22), que se torna o passo *v* do IMM. Por outro lado, todos os resultados numéricos mostrados neste e no Capítulo 5 foram obtidos usando o FKE como estimador das hipóteses do sistema. Neste caso, as equações (4.20)-(4.21) tornam-se as etapas de predição e correção de estimativas do FKE descritas no Apêndice A, enquanto que (4.22) pode ser calculada assim como no passo *v* do M³H na Seção 2.2.2.2. Além do FK e do FKE, outra opção possível de filtro para rastreamento das hipóteses seria o FKU apresentado no Apêndice A, que resultaria em formas de cálculo diferentes de (4.20)-(4.22). Não importando qual o filtro escolhido, o passo *iii* leva a condição inicial $\left(\underline{x}_{k-1}^{(i)}, \underline{P}_{k-1}^{(i)} \right)$ do filtro seguindo o modo $m_k = i$ e calcula o vetor de estados e a matriz de covariâncias preditos $\left(\bar{x}_k^{(i)}, \bar{P}_k^{(i)} \right)$. Em seguida, o passo *iv* provê as estimativas corrigidas $\left(\hat{x}_k^{(i)}, \hat{P}_k^{(i)} \right)$ baseado na amostra de saída atual do sistema y_k . O passo *v*, por sua vez, atualiza a probabilidade de cada hipótese baseado na verossimilhança do vetor de saída e na incerteza do termo de inovação.

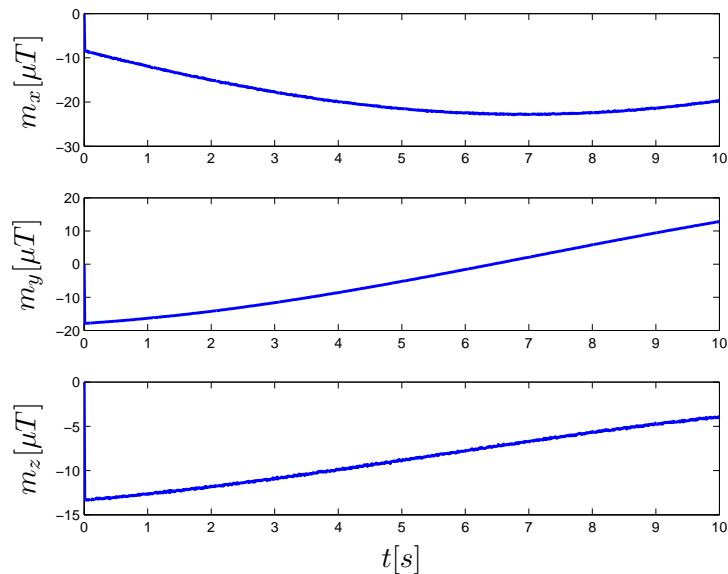
4.3.2 Resultados numéricos

4.3.2.1 Simulações

Esta seção apresenta o desempenho de estimação sob condições adversas do FKE e do HDFS para o sistema de localização descrito na Seção 3.5. Dentre os sensores embarcados no VANT, o magnetômetro é o mais afetado pela interferência eletromagnética gerada pelas linhas de transmissão de energia. Somando-se a isso, vibrações mecânicas algumas vezes desconectam o magnetômetro momentaneamente do computador embarcado, gerando medições inválidas do sensor. A princípio, desejava-se usar apenas um FKE para realizar a localização do VANT. Porém, foi obtido um desempenho ruim durante testes em um simulador de vôo, levando à necessidade de um método de filtragem alternativo. A solução encontrada foi o desenvolvimento do HDFS, tornando o sistema de localização mais robusto a distúrbios ambientais.



(a) Erros de atitude para o FKE.

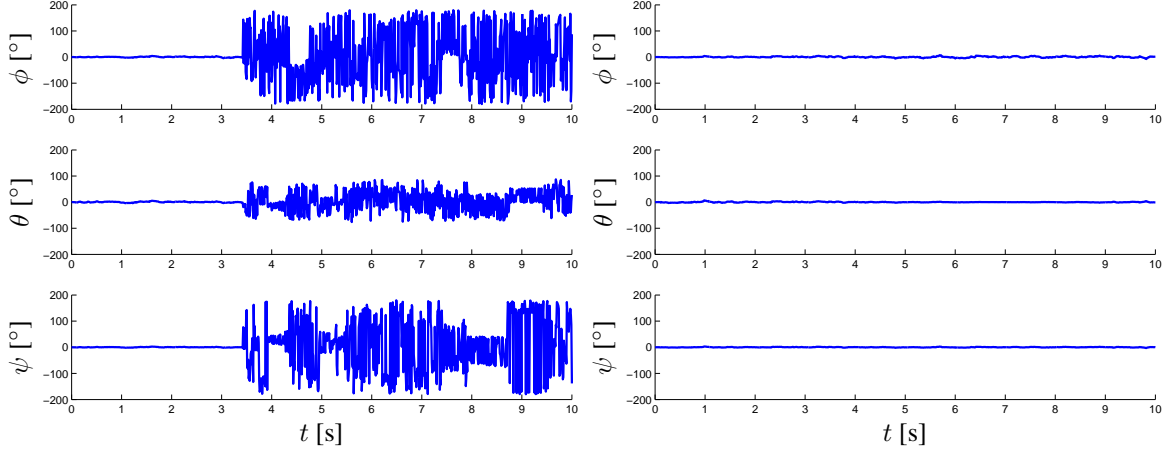


(b) Medições do magnetômetro.

Figura 4.3: Resultados de simulação sob condições normais de operação.

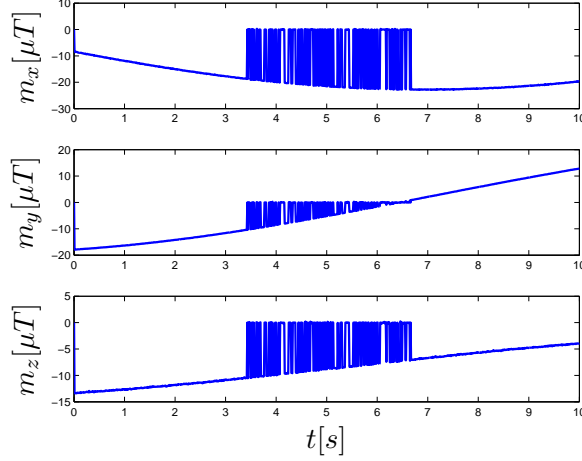
O sistema de localização foi inicialmente testado sem a presença de fortes perturbações (ver Figura 4.3). As medições foram corrompidas apenas por ruídos convencionais e a estimação de estados foi feita utilizando um FKE. Foi obtido um erro máximo de 5° em todos os ângulos de atitude, indicando que a implementação do FKE está correta. Em seguida, duas outras simulações foram feitas introduzindo-se fortes perturbações nas medidas do magnetômetro durante parte do experimento. O propósito destas perturbações era simular tanto interferências induzidas pelas linhas de transmissão de energia, quanto desconexões entre o magnetômetro e o computador embarcado. Durante um terço do tempo, distúrbios ocorreram aleatoriamente, como pode ser visto na Figura 4.4(c). Mais uma vez o FKE foi usado para estimar a pose do VANT, fornecendo os resultados de estimação de atitude mostrados na Figura 4.4(a). Durante a primeira parte do experimento em que o magnetômetro

opera corretamente, o desempenho do FKE é satisfatório. Todavia, à medida em que distúrbios começam a afetar as medições do magnetômetro, as estimativas fornecidas pelo FKE tornam-se completamente degradadas, resultando nos erros inaceitáveis mostrados na Figura 4.4(a). Procurando resolver este problema, o HDFS foi usado para realizar a estimação de estado do VANT.



(a) Erros de atitude para o EKF

(b) Erros de atitude para o HDFS



(c) Medições do magnetômetro.

Figura 4.4: Resultados de simulação sob condições adversas de operação do magnetômetro.

Baseando-se em (3.39), duas equações de medições dependentes do modo

$$y_1(k) = \begin{bmatrix} m_{mag,k}^b \\ p_{gps,k}^n \\ v_{gps,k}^n \\ h_{alt,k}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_{n,k}^b)^T m_E^n + \epsilon_{m,k} \\ p_k^n + \epsilon_{p,k} \\ v_k^n + \epsilon_{v,k} \\ z_k^n + \epsilon_{h,k} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

$$y_2(k) = \begin{bmatrix} m_{disc,k}^b \\ p_{gps,k}^n \\ v_{gps,k}^n \\ h_{alt,k}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + \epsilon_{disc} \\ p_k^n + \epsilon_{p,k} \\ v_k^n + \epsilon_{v,k} \\ z_k^n + \epsilon_{h,k} \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

foram usadas para modelar as saídas do sistema. A equação (4.23) corresponde à situação em que todos os sensores operam corretamente, enquanto que (4.24) modela falhas do magnetômetro. Usando (4.23)-(4.24) como o modelo de medição, o HDFS forneceu os resultados mostrados na Figura 4.4(b). Mesmo sob condições adversas capazes de degradar completamente as estimativas do FKE, o HDFS mostrou um desempenho muito similar àquele do FKE na situação de ausência de perturbações, indicando sua utilidade como um estimador estocástico robusto.

4.3.2.2 Experimento com dados reais

Após ser validado em simulação, o HDFS foi testado em um experimento real de localização. O sistema de localização do VANT foi embarcado em um automóvel e coletou dados dos sensores enquanto o veículo movia-se em um circuito fechado dentro do *campus* da Universidade de Brasília. O objetivo era verificar se o sistema de localização era capaz de prover estimativas precisas de atitude e posição baseadas em medições reais dos sensores. Mais uma vez, uma comparação foi feita entre o FKE e o HDFS.

Estimativas de atitude e posição 3D são mostradas nas Figuras 4.5(a) e 4.5(b) para o FKE. Assim como nos resultados anteriores de simulação, o desempenho do FKE foi ruim e sensível a distúrbios nos sensores. Além disso, medições do magnetômetro com norma Euclidiana acima de um limiar escolhido tiveram de ser eliminadas de forma a evitar que o FKE divergisse. Diferentemente do FKE, os resultados obtidos com o HDFS são, de fato, estimativas confiáveis da pose do sistema de localização durante o experimento. Assim como pode ser visto nas Figuras 4.5(c) e 4.5(d), os ângulos de rolagem e arfagem permaneceram pequenos durante todo o experimento, o que está de acordo com o fato de que carros não se movimentam em torno desses eixos enquanto andam, exceto por eventuais vibrações da suspensão. Além disso, as estimativas do ângulo de guinada seguem a orientação do automóvel durante o percurso, voltando a zero quando o veículo retorna a sua posição inicial. A respeito da posição 3D, o HDFS foi capaz de seguir corretamente o veículo e há apenas pequenos desvios entre as medidas de GPS e as posições 3D estimadas, algo que não ocorre com o FKE.

4.4 *MULTIPLE HYPOTHESES MIXING FILTER* (MHMF): SEGUIMENTO DE MÚLTIPLAS HIPÓTESES

O filtro estocástico híbrido apresentado nesta seção generaliza o IMM e aprimora seu desempenho na estimação de estados de sistemas dinâmicos complexos por meio da habilidade de seguimento de múltiplas hipóteses. Lembrando que d denota a profundidade de fusão de hipóteses do filtro, o passo de mistura de estimativas do IMM é tornado mais geral

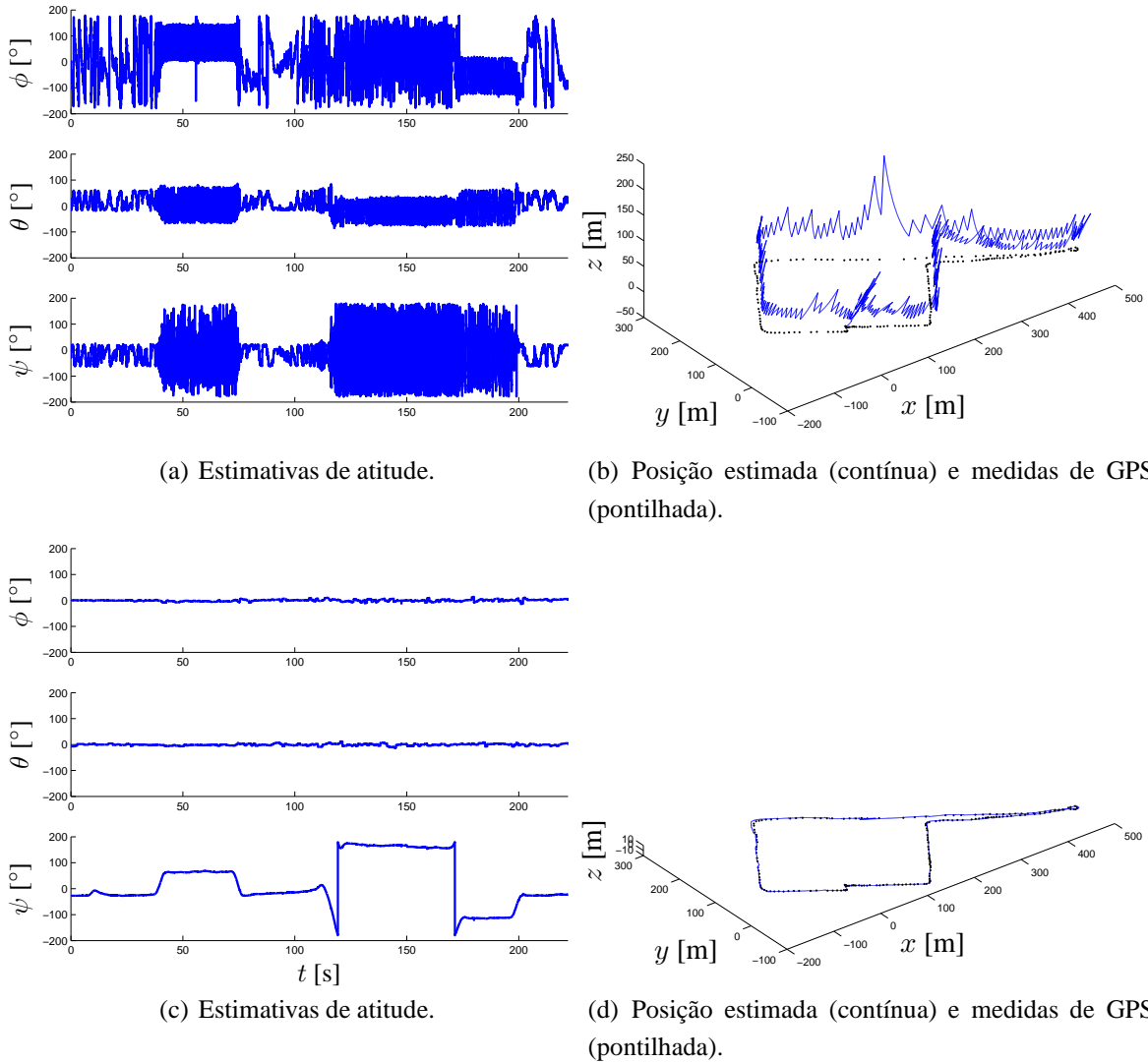


Figura 4.5: Estimativas de atitude e posição 3D do FKE e do HDFS.

ao permitir-se $d \geq 1$ em (4.17), implicando

$$g_{k-1}(j) = \sum_{i=1}^{M^d} p(x_{k-1} | m_{k-1} = j, I_{k-1}^{(i)}, y_{1:k-1}) \times \Pr(I_{k-1}^{(i)} | m_{k-1} = j, y_{1:k-1}), \quad (4.25)$$

$$\Pr(I_{k-1}^{(i)} | m_{k-1} = j, y_{1:k-1}) = \frac{\Pr(m_{k-1} = j | I_{k-1}^{(i)}, y_{1:k-1}) \Pr(I_{k-1}^{(i)} | y_{1:k-1})}{\Pr(m_{k-1} = j | y_{1:k-1})}. \quad (4.26)$$

Note que $I_{k-1}^{(i)}$ é uma hipótese particular sendo seguida entre dois passos de mistura de estimativas e que $I_{k-1}^{(i)} \neq H_{k-1}^{(i)}$. Para verificar esta última desigualdade, note que os passos do filtro que gerenciam o número de hipóteses alteram o crescimento exponencial no número de hipóteses estimadas em (4.14), assim como mostrado na Figura 4.6, tornando $I_{k-1}^{(i)} \neq H_{k-1}^{(i)}$. Em (4.26), $\Pr(m_{k-1} = j | I_{k-1}^{(i)}, y_{1:k-1})$ pode ser 0 ou 1 dependendo do modo ao qual corresponde $I_{k-1}^{(i)}$. É fácil ver que o passo de mistura do IMM é uma caso particular de (4.25)-(4.26) com $d = 1$.

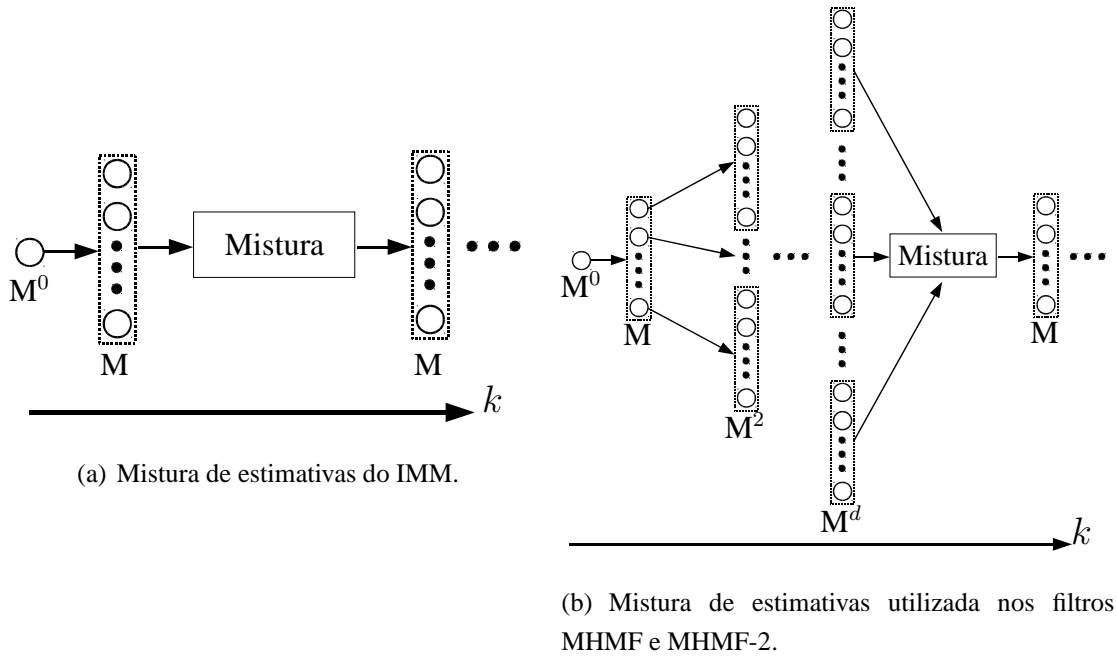


Figura 4.6: Mistura de estimativas com diferentes profundidades de fusão d .

4.4.1 Algoritmo

No problema de filtragem apresentado na Seção 4.2, escolher $d > 1$ em (4.25)-(4.26) tende a melhorar as estimativas dadas por (4.16), mas aumenta exponencialmente o número de hipóteses calculadas. De acordo com [13], considerar modelos em demasia pode ser tão prejudicial ao estimador quanto considerar menos do que o necessário, uma vez que as estimativas provenientes de hipóteses muito improváveis levam à degradação do desempenho do filtro e aumento de sua carga computacional. Portanto, de maneira semelhante a [20], foi introduzido um passo de eliminação de hipóteses, que evita cálculos desnecessários e previne a degradação das saídas do estimador ao desconsiderar hipóteses cujas probabilidades estejam abaixo de um dado limiar ϵ . Esta eliminação, porém, pode levar a problemas de instabilidade dependendo do momento em que é feita no algoritmo, como discutido na Seção 4.5 e no Capítulo 5.

Assim como pode ser visto em (4.25)-(4.26) e na Figura 4.6(b), estimar o estado de (4.1)-(4.2) consiste no seguimento de múltiplas hipóteses entre dois instantes de mistura de estimativas. Somando-se a isso, faz-se também necessário estimar a probabilidade das hipóteses de forma a poder-se ponderar as estimativas dos filtros de acordo com suas verossimilhanças. Combinando-se este filtro que rastreia múltiplas hipóteses com o algoritmo de estimação da MPT da Seção 2.3, tem-se o algoritmo do MHMF descrito a seguir e ilustrado na Figura 4.7.

MHMF (Multiple Hypotheses Mixing Filter) [88]

Sejam $\hat{x}_k^{(i)}$ e $\hat{P}_k^{(i)}$ o vetor de estado e sua matriz de covariâncias associada correspondendo ao filtro rastreando a hipóteses $I_k^{(i)} \in \mathcal{I}_k$ do sistema no k -ésimo instante amostral, em que \mathcal{I}_k é o conjunto de todas as possíveis hipóteses e d é a profundidade de fusão de hipóteses.

Além disso, denote por $n(\mathcal{I}_k)$ o número total de elementos em \mathcal{I}_k e $m_k^{(i)} \in \mathbb{M}$ como o modo atual para a hipótese $I_k^{(i)}$. Sejam também y_k o vetor atual de saída do sistema e $0 \leq \varepsilon < 1$ o limiar de eliminação de hipóteses. Definindo

$$\hat{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k) = \Pr(I_k^{(i)} | y_{1:k}), \quad \hat{p}^{(i)}(m_k) = \Pr(m_k=i | y_{1:k}),$$

e assumindo condições iniciais

$$\hat{p}^{(j)}(\mathcal{I}_0), \hat{x}_0^{(j)}, \hat{P}_0^{(j)}, \hat{\Pi}_0, q_0=1, j \in \{1, 2, \dots, M\},$$

o MHMF é dado pelos seguintes passos:

i Predição das probabilidades das hipóteses

$$\begin{aligned} \bar{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k) &= (\hat{\pi}_{a,b}(k-1)) \hat{p}^{(j)}(\mathcal{I}_{k-1}), \\ a &= m_{k-1}^{(j)}, b = m_k^{(i)}, i \in \{1, \dots, n(\mathcal{I}_k)\}, j \in \{1, \dots, n(\mathcal{I}_{k-1})\} \end{aligned}$$

em que a nova hipótese $I_k^{(i)}$ é gerada a partir de $I_{k-1}^{(j)}$.

ii Eliminação de hipóteses

Elimine hipóteses $I_k^{(i)}$ com

$$\frac{\bar{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k)}{\sum_{j=1}^{n(\mathcal{I}_k)} \bar{p}^{(j)}(\mathcal{I}_k)} \leq \varepsilon,$$

normalize as probabilidades $\bar{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k)$ e atualize $n(\mathcal{I}_k)$ adequadamente.

iii Condições iniciais

- Se $n(\mathcal{I}_k) \leq M$ ou $q_k < d$

$$\begin{aligned} \underline{x}_k^{(i)} &= \hat{x}_{k-1}^{(j)}, \underline{P}_k^{(i)} = \hat{P}_{k-1}^{(j)}, \\ q_k &= q_{k-1} + 1, \end{aligned}$$

significando que a nova hipótese $I_k^{(i)}$ herda as condições iniciais de sua hipótese geradora $I_{k-1}^{(j)}$.

- Senão

$$\begin{aligned} \bar{p}^{(i)}(m_k) &= \sum_{j=1}^{n(\mathcal{I}_k)} \Pr(m_k=i | I_k^{(j)}, y_{1:k-1}) \bar{p}^{(j)}(\mathcal{I}_k), \\ \underline{x}_{k-1}^{(i)} &= \sum_{j=1}^M \frac{\hat{\pi}_{j,i}(k-1) \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) r_{k-1}^{(j)}}{\bar{p}^{(i)}(m_k)}, \\ r_{k-1}^{(j)} &= \sum_{l=1}^{n(\mathcal{I}_{k-1})} \hat{x}_{k-1}^{(l)} \hat{\Pr}(I_{k-1}^{(l)} | m_{k-1}=j, y_{1:k-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{P}_{k-1}^{(i)} &= \sum_{j=1}^M \frac{\hat{\pi}_{j,i}(k-1) \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) \left[\Delta_{k-1}^{(j)} + \delta(i, j) \right]}{\bar{p}^{(i)}(m_k)}, \\
\Delta_{k-1}^{(j)} &= \sum_{l=1}^{n(\mathcal{I}_{k-1})} \hat{P}_{k-1}^{(l)} \hat{\text{Pr}}(I_{k-1}^{(l)} | m_{k-1}=j, y_{1:k-1}), \\
\delta(i, j) &= \left(r_{k-1}^{(j)} - \underline{x}_{k-1}^{(i)} \right) \left(r_{k-1}^{(j)} - \underline{x}_{k-1}^{(i)} \right)^T, \\
q_k &= 1,
\end{aligned}$$

em que $\hat{\text{Pr}}(I_{k-1}^{(l)} | m_{k-1}=j, y_{1:k-1})$ é calculada de acordo com (4.26).

iv Predição das estimativas

$$(\underline{x}_{k-1}^{(i)}, \underline{P}_{k-1}^{(i)}) \xrightarrow{\text{Predição}} (\bar{x}_k^{(i)}, \bar{P}_k^{(i)}). \quad (4.27)$$

v Correção das estimativas

$$(\bar{x}_k^{(i)}, \bar{P}_k^{(i)}) \xrightarrow{\text{Correção}} (\hat{x}_k^{(i)}, \hat{P}_k^{(i)}). \quad (4.28)$$

vi Correção das probabilidades das hipóteses

$$\hat{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k) = \frac{p(y_k | I_k^{(i)}, \hat{\Pi}_{k-1}, y_{1:k-1}) \bar{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k)}{c_i}, \text{ em que } c_i \text{ não precisa ser calculado,} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_p &= \sum_{j=1}^{n(\mathcal{I}_k)} \hat{p}^{(j)}(\mathcal{I}_k), \\
\hat{p}(\mathcal{I}_k) &= [\hat{p}^{(1)}(\mathcal{I}_k), \dots, \hat{p}^{(n(\mathcal{I}_k))}(\mathcal{I}_k)]^T \left(\frac{1}{\gamma_p} \right).
\end{aligned}$$

vii Geração das saídas

$$\begin{aligned}
\hat{x}_k &= \sum_{i=1}^{n(\mathcal{I}_k)} \hat{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k) \hat{x}_k^{(i)}, \\
\hat{P}_k &= \sum_{i=1}^{n(\mathcal{I}_k)} \hat{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k) \left[\hat{P}_k^{(i)} + \left(\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k \right) \left(\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k \right)^T \right], \\
\hat{p}^{(i)}(m_k) &= \sum_{j=1}^{n(\mathcal{I}_k)} \hat{\text{Pr}}(m_k=i | I_k^{(j)}, y_{1:k}) \hat{p}^{(j)}(\mathcal{I}_k), \\
\hat{p}(m_k) &= [\hat{p}^{(1)}(m_k), \dots, \hat{p}^{(M)}(m_k)]^T.
\end{aligned}$$

viii Atualização da MPT: $\hat{\Pi}_{k-1} \xrightarrow{\text{Seção 2.3}} \hat{\Pi}_k$.

As observações acerca de (4.27)-(4.29) são as mesmas da Seção 4.3.1.

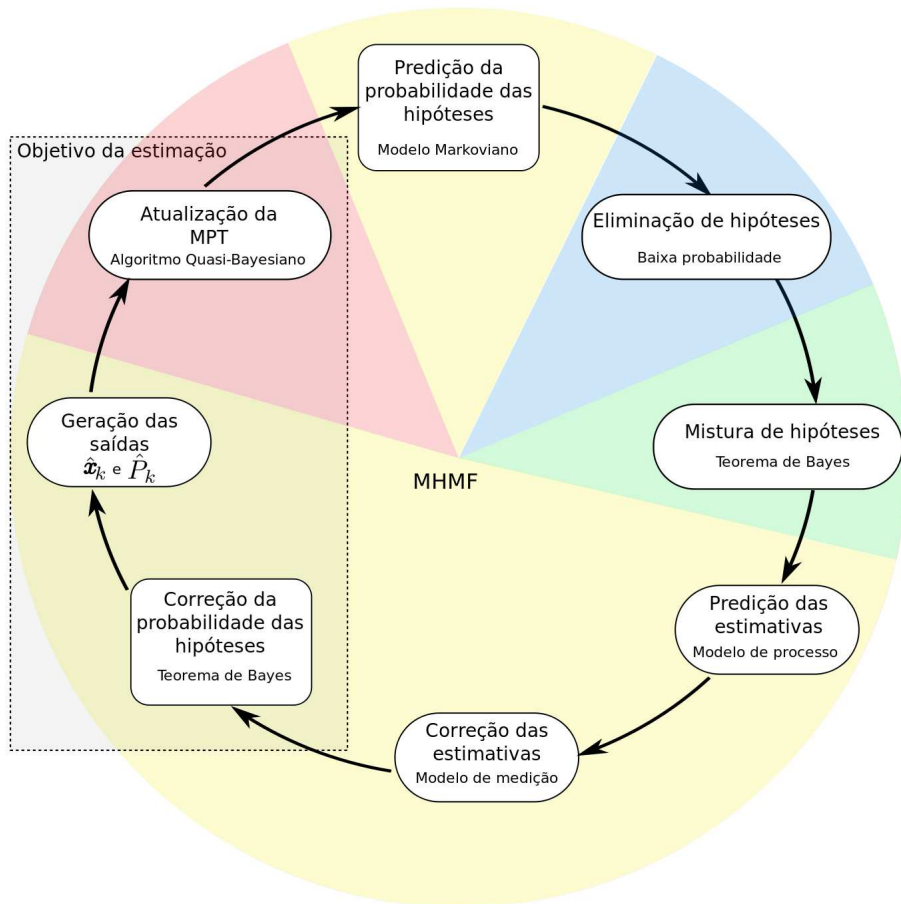


Figura 4.7: Diagrama do algoritmo do filtro MHMF.

4.4.2 Resultados Numéricos

O problema de rastreamento de alvos figura entre as aplicações mais comuns de estimação MM [9]. De forma a poder-se verificar o desempenho do MHMF e compará-lo com aquele do IMM, implementou-se um exemplo de rastreamento de alvos em um SCTA baseado em [39]. O FKE foi o filtro escolhido para seguir cada um dos modos do sistema. De acordo com [64], este filtro tem complexidade computacional $\mathcal{O}(L^3)$, em que L é a dimensão do vetor de estados. Uma vez que L é constante para todos os modos do sistema, a complexidade computacional dos filtros MM apresentados neste e no Capítulo 5 torna-se uma função linear do número de hipóteses sendo rastreadas. Logo, a complexidade computacional para todos os filtros MM é $\mathcal{O}(n(\mathcal{I}_k))$, em que $n(\mathcal{I}_k)$ foi definido na Seção 4.4.1.

Seja $x = [p_x \ v_x \ p_y \ v_y \ \omega]^T$ o vetor de estados associado ao sistema de rastreamento de alvos, em que p_x e p_y são as coordenadas Cartesianas ao longo dos eixos x e y e $v_x = \dot{p}_x$ e $v_y = \dot{p}_y$ são as velocidades correspondentes. O termo ω denota a velocidade angular durante mudanças de curso. Para este exemplo de rastreamento de alvos, consideram-se dois modelos dinâmicos distintos. O primeiro deles diz respeito a um Movimento Uniforme

(MU) e é descrito por

$$x_k = \begin{bmatrix} 1 & \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\tau^2 & 0 \\ \tau & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\tau^2 \\ 0 & \tau \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w_{k-1}, \quad (4.30)$$

em que τ denota o período de amostragem discreto e $w_{k-1} \sim N(0, Q_k)$ é um processo de ruído Gaussiano que modela perturbações na forma de aceleração. O segundo modelo dinâmico refere-se a mudanças de curso por meio de Curvas Coordenadas (CC) com velocidade angular constante ω , cujo modelo é dado por

$$x_k = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} & 0 & -\frac{1-\cos(\omega\tau)}{\omega} & 0 \\ 0 & \cos(\omega\tau) & 0 & -\sin(\omega\tau) & 0 \\ 0 & \frac{1-\cos(\omega\tau)}{\omega} & 1 & \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} & 0 \\ 0 & \sin(\omega\tau) & 0 & \cos(\omega\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\tau^2 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\tau^2 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{bmatrix} w_{k-1}. \quad (4.31)$$

Para ambos os modelos MU e CC, o modelo de saída é

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k, \quad (4.32)$$

$v_k \sim N(0, R_k)$ e w_{k-1} são descorrelacionados. Partindo de uma posição inicial

$$x_0 = [25000 \quad -120 \quad 10000 \quad 0 \quad 0]^T,$$

as simulações desta seção consideraram a seguinte trajetória para a aeronave:

1. MU por 30 s;
2. CC com $\omega = 5\pi/180 \text{ rad/s}$ por 7 s;
3. MU por 30 s;
4. CC com $\omega = -3\pi/180 \text{ rad/s}$ por 15 s;
5. MU por 30 s.

Inicialmente, foram escolhidos uma profundidade de fusão $d = 1$ e um limiar de eliminação de hipóteses $\varepsilon = 0$ para comprovar experimentalmente a equivalência entre o MHMF e o IMM nesta situação particular. Assim como esperado, os resultados dos filtros foram idênticos.

Tabela 4.1: Resultados para as 100 Realizações de Monte Carlo.

	d	Número médio de hipóteses	Erro RMS relativo
IMM	1	2	1,22
MHMF	2	2,23	1,0
MHMF	3	3,35	0,98

Em seguida, um conjunto de 100 Realizações de Monte Carlo do sistema descrito por (4.30)-(4.32) foi usado para comparar os resultados do MHMF e do IMM, que podem ser vistos na Tabela 4.1. Ambas as configurações do MHMF consideraram $\varepsilon = 0,02$ para eliminar hipóteses pouco prováveis. Procurando mostrar os benefícios de realizar a estimação da MPT em tempo real, todos os filtros começaram com a estimativa inicial

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}.$$

Assim como mostrado na Tabela 4.1, o MHMF mostrou desempenho superior ao do IMM em ambos os casos sob um critério de erro RMS. A incerteza inicial a respeito dos parâmetros do sistema foi responsável por um pequeno aumento na carga computacional, uma vez que um número maior de hipóteses foi necessário para estimar corretamente o estado do sistema. Contudo, o erro RMS relativo confirma que os ganhos de desempenho foram significativos e a Figura 4.8 mostra os erros de estimação para uma das Realizações de Monte Carlo com $d = 2$. Ainda que o MHMF tenha mostrado melhor desempenho para $d = 3$, o aumento considerável na carga computacional mostra que considerar um número maior de hipóteses nem sempre é melhor, o que está de acordo com [13]. Ademais, é importante ressaltar que o MHMF superou o IMM em todas as simulações consideradas

Em uma análise seguinte, investigou-se a tolerância do MHMF a falhas de modelagem. Para esta situação, a MPT constante

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}$$

foi usada para ambos o IMM e o MHMF. No lugar de (4.30), o MU da aeronave foi modelado por

$$x_k = \begin{bmatrix} 1 & \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\tau^2 & 0 \\ \tau & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\tau^2 \\ 0 & \tau \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w_{k-1}, \quad (4.33)$$

em que um valor 1 adicional foi introduzido na última linha da matriz de evolução do processo de forma a simular o efeito errôneo de uma velocidade angular. Os resultados de

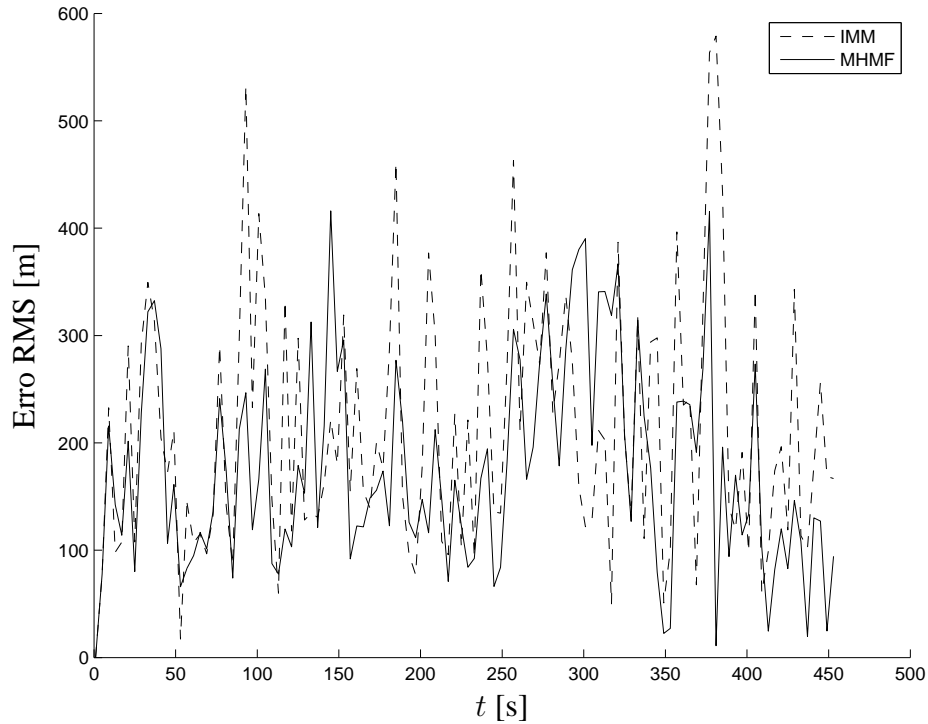


Figura 4.8: Erros RMS de estimação da posição.

Tabela 4.2: Resultados comparativos para o SCTA com erros de modelagem.

d	Número médio de hipóteses	Razão (MHMF / IMM) para o erro RMS
2	3,0	0,35
3	4,7	0,32
4	7,5	0,26

estimação para este caso não consideraram eliminação de hipóteses ($\varepsilon = 0$).

Pode-se concluir, a partir dos resultados mostrados na Tabela 4.2, que a consideração de um número maior de hipóteses tende a melhorar o desempenho do filtro. Assim como exposto na Seção 4.2.1, o pequeno número de hipóteses considerado pelo IMM pode, às vezes, ser uma suposição muito restritiva, tornando o filtro sensível a erros de modelagem. As razões dos erros RMS mostradas na Tabela 4.2 para o MHMF e o IMM claramente mostram a melhoria da filtragem à medida em que a profundidade de fusão aumenta. Por exemplo, o erro RMS para o MHMF é aproximadamente 26% do erro do IMM na mesma situação considerando-se uma profundidade $d = 4$. Portanto, caso seja possível aumentar-se a carga computacional, seria interessante considerar-se uma profundidade de fusão maior de forma a mitigar problemas originados de problemas de modelagem.

4.5 NOVA VERSÃO DO MHMF (MHMF-2): GANHOS DE DESEMPENHO E ESTABILIDADE

Em [20] e no algoritmo da Seção 4.4.1, o passo de eliminação de hipóteses é executado imediatamente antes dos passos de predição e correção das estimativas, minimizando o número de FKEs usados para seguir as diferentes hipóteses. Entretanto, problemas podem ocorrer quando o sistema real sofre uma transição de modos modelada com baixa probabilidade. Neste caso, é possível que todas as hipóteses considerando esta transição sejam incorretamente eliminadas, levando a uma total discrepância entre o modo real do sistema e aqueles considerados pelo estimador. Esta eliminação equivocada é causada principalmente pelo passo de predição da probabilidade das hipóteses usando a MPT, que pode reduzir a probabilidade de todas as hipóteses considerando o modo correto do sistema para valores abaixo do limiar de eliminação, tornando o estimador instável.

Uma maneira simples de contornar o problema de eliminação errônea de hipóteses é elevar o limiar de eliminação, mas que fatalmente leva à consideração de um número maior de hipóteses, aumento da complexidade computacional do algoritmo e até mesmo a prejuízos da qualidade das estimativas. Logo, a solução proposta no MHMF-2 não é mudar o valor do limiar de eliminação, mas sim realizar um passo de eliminação considerando uma maior quantidade de informações. Se a predição das estimativas for feita considerando-se todas as possíveis hipóteses preditas, tem-se toda a informação necessária para corrigir as probabilidades das hipóteses. Portanto, mesmo que o sistema faça uma transição de baixa probabilidade entre dois modos, a correção das probabilidades das hipóteses evitará que o passo seguinte de eliminação gere discrepâncias entre o sistema e o estimador. Além disso, no caso de estimadores baseados em filtragem de Kalman, mudanças no número de hipóteses durante o passo de predição das estimativas não têm influência significativa sobre a complexidade computacional do algoritmo como um todo, visto que a correção das estimativas envolvendo inversões matriciais é a operação mais cara em termos de tempo de computação [65]. Os ganhos de desempenho e estabilidade do MHMF-2 são aferidos no Capítulo 5 em uma análise comparativa deste filtro com outros quatro já presentes na literatura: o FKE [45]; o HDFS [43]; o MHMF [88]; e o M³H [20].

4.5.1 Algoritmo

A inovação trazida pelo MHMF-2 em relação ao MHMF é a mudança do momento em que é feito o passo de eliminação de hipóteses, acarretando ganhos de estabilidade do estimador sem, no entanto, prejudicar sua computabilidade. Por meio de mudanças simples no algoritmo, chegou-se a um estimador que conserva os ganhos de desempenho do MHMF e que foi capaz de fornecer boas estimativas de estado em todas as situações testadas até o momento. Este estimador concentra todas as melhorias introduzidas pelos algoritmos anteriormente apresentados, incluindo a estimação em tempo real da MPT, a consideração de

profundidade variável de fusão de estimativas e a eliminação de hipóteses improváveis, devendo ser considerado o principal resultado deste trabalho.

MHMF-2 (Novo MHMF)

Sejam $\hat{x}_k^{(i)}$ e $\hat{P}_k^{(i)}$ o vetor de estado e sua matriz de covariâncias associada correspondendo ao filtro seguindo a hipótese $I_k^{(i)} \in \mathcal{I}_k$ do sistema no k -ésimo instante amostral, em que \mathcal{I}_k é o conjunto de todas as possíveis hipóteses e d é a profundidade de fusão de hipóteses. Além disso, denote por $n(\mathcal{I}_k)$ o número total de elementos em \mathcal{I}_k e $m_k^{(i)} \in \mathbb{M}$ como o modo atual para a hipótese $I_k^{(i)}$. Sejam também y_k o vetor atual de saída do sistema e $0 \leq \varepsilon < 1$ o limiar de eliminação de hipóteses. Definindo

$$\hat{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k) = \Pr(I_k^{(i)} | y_{1:k}), \quad \hat{p}^{(i)}(m_k) = \Pr(m_k = i | y_{1:k}),$$

e assumindo condições iniciais

$$\hat{p}^{(j)}(\mathcal{I}_0), \hat{x}_0^{(j)}, \hat{P}_0^{(j)}, \hat{\Pi}_0, q_0 = 1, j \in \{1, 2, \dots, M\},$$

o algoritmo do MHMF-2 é dado por:

i Predição das probabilidades das hipóteses

$$\begin{aligned} \bar{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k) &= (\hat{\pi}_{a,b}(k-1)) \hat{p}^{(j)}(\mathcal{I}_{k-1}), \\ a &= m_{k-1}^{(j)}, b = m_k^{(i)}, i \in \{1, \dots, n(\mathcal{I}_k)\}, j \in \{1, \dots, n(\mathcal{I}_{k-1})\}, \end{aligned}$$

em que a nova hipótese $I_k^{(i)}$ é gerada a partir de $I_{k-1}^{(j)}$.

ii Condições iniciais para o passo atual

- Se $n(I_k) \leq M$ ou $q_k < d$

$$\begin{aligned} \underline{x}_k^{(i)} &= \hat{x}_{k-1}^{(j)}, \underline{P}_k^{(i)} = \hat{P}_{k-1}^{(j)}, \\ q_k &= q_{k-1} + 1, \end{aligned}$$

significando que a nova hipótese $I_k^{(i)}$ herda as condições iniciais de sua hipótese geradora $I_{k-1}^{(j)}$.

- Senão

$$\begin{aligned} \bar{p}^{(i)}(m_k) &= \sum_{j=1}^{n(\mathcal{I}_k)} \hat{\Pr}(m_k = i | I_k^{(j)}, y_{1:k-1}) \bar{p}^{(j)}(\mathcal{I}_k), \\ \underline{x}_{k-1}^{(i)} &= \sum_{j=1}^M \frac{\hat{\pi}_{j,i}(k-1) \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) r_{k-1}^{(j)}}{\bar{p}^{(i)}(m_k)}, \\ r_{k-1}^{(j)} &= \sum_{l=1}^{n(\mathcal{I}_{k-1})} \hat{x}_{k-1}^{(l)} \hat{\Pr}(I_{k-1}^{(l)} | m_{k-1} = j, y_{1:k-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{P}_{k-1}^{(i)} &= \sum_{j=1}^M \frac{\hat{\pi}_{j,i}(k-1) \hat{p}^{(j)}(m_{k-1}) \left[\Delta_{k-1}^{(j)} + \delta(i, j) \right]}{\bar{p}^{(i)}(m_k)}, \\
\Delta_{k-1}^{(j)} &= \sum_{l=1}^{n(\mathcal{I}_{k-1})} \hat{P}_{k-1}^{(l)} \hat{\text{Pr}}(I_{k-1}^{(l)} | m_{k-1}=j, y_{1:k-1}), \\
\delta(i, j) &= \left(r_{k-1}^{(j)} - \underline{x}_{k-1}^{(i)} \right) \left(r_{k-1}^{(j)} - \underline{x}_{k-1}^{(i)} \right)^T, \\
q_k &= 1,
\end{aligned}$$

em que $\hat{\text{Pr}}(I_{k-1}^{(l)} | m_{k-1}=j, y_{1:k-1})$ é calculada de acordo com (4.26).

iii Predição das estimativas

$$(\underline{x}_{k-1}^{(i)}, \underline{P}_{k-1}^{(i)}) \xrightarrow{\text{Predição}} (\bar{x}_k^{(i)}, \bar{P}_k^{(i)}). \quad (4.34)$$

iv Correção das probabilidades das hipóteses

$$\hat{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k) = \frac{p(y_k | I_k^{(i)}, \hat{\Pi}_{k-1}, y_{1:k-1}) \bar{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k)}{c_i}, \quad (4.35)$$

$$\gamma_p = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{I}_k)} \hat{p}^{(j)}(\mathcal{I}_k),$$

$$\hat{p}(\mathcal{I}_k) = [\hat{p}^{(1)}(\mathcal{I}_k) \dots \hat{p}^{(n(\mathcal{I}_k))}(\mathcal{I}_k)]^T \left(\frac{1}{\gamma_p} \right),$$

em que c_i é uma constante de normalização que não precisa ser calculada.

v Eliminação de hipóteses

Elimine hipóteses $I_k^{(i)}$ com

$$\frac{\hat{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k)}{\sum_{j=1}^{n(\mathcal{I}_k)} \hat{p}^{(j)}(\mathcal{I}_k)} \leq \varepsilon, \quad (4.36)$$

renormalize as probabilidades $\hat{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k)$ e atualize $n(\mathcal{I}_k)$ adequadamente.

vi Correção das estimativas

$$(\bar{x}_k^{(i)}, \bar{P}_k^{(i)}) \xrightarrow{\text{Correção}} (\hat{x}_k^{(i)}, \hat{P}_k^{(i)}). \quad (4.37)$$

vii Geração de estimativas

$$\begin{aligned}
\hat{x}_k &= \sum_{i=1}^{n(\mathcal{I}_k)} \hat{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k) \hat{x}_k^{(i)}, \\
\hat{P}_k &= \sum_{i=1}^{n(\mathcal{I}_k)} \hat{p}^{(i)}(\mathcal{I}_k) \left[\hat{P}_k^{(i)} + \left(\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k \right) \left(\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k \right)^T \right], \\
\hat{p}^{(i)}(m_k) &= \sum_{j=1}^{n(\mathcal{I}_k)} \hat{\text{Pr}}(m_k=i | I_k^{(j)}, y_{1:k}) \hat{p}^{(j)}(\mathcal{I}_k), \\
\hat{p}(m_k) &= [\hat{p}^{(1)}(m_k), \dots, \hat{p}^{(M)}(m_k)]^T.
\end{aligned}$$

viii *Atualização da MPT*: $\hat{\Pi}_{k-1} \xrightarrow{\text{Seção 2.3}} \hat{\Pi}_k$.

Os comentários a respeito de (4.34), (4.35) e (4.37) são os mesmos da Seção 4.3.1. O diagrama da Figura 4.9 mostra que, diferentemente do M³H (Figura 2.5) e do MHMF (Figura 4.7), a eliminação de hipóteses em (4.36) é feita usando-se os valores corrigidos das probabilidades.

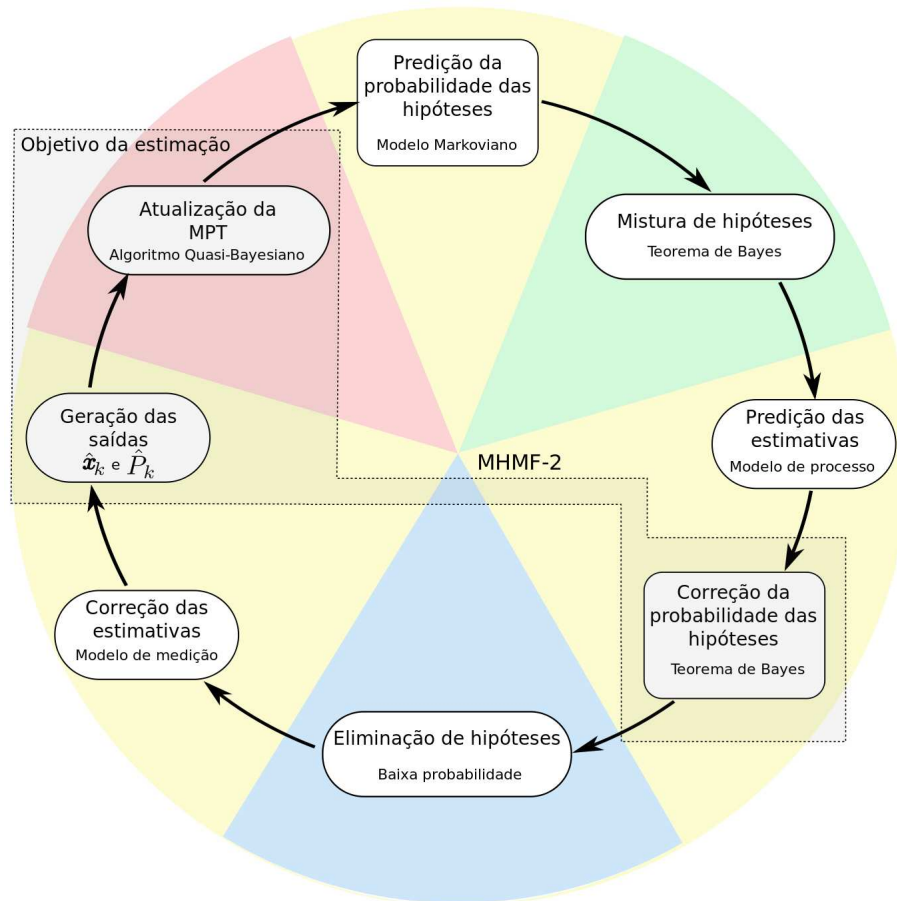


Figura 4.9: Diagrama do algoritmo do filtro MHMF-2.

5 ANÁLISE COMPARATIVA DE DESEMPENHO

“Beware of bugs in the above code; I have only proved it correct, not tried it.”

Donald Knuth

5.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta alguns resultados numéricos comparando o desempenho dos filtros híbridos desenvolvidos neste trabalho e outros algoritmos presentes na literatura. As comparações são feitas em termos de qualidade das estimativas (erro RMS em relação a valores de referência), estabilidade e carga computacional. O sistema de localização descrito na Seção 3.5 foi testado tanto em ambientes simulados quanto em experimentos reais de navegação de forma a que se pudesse avaliar a utilidade e o desempenho comparativo dos diferentes estimadores. Em ambas as situações, o modelamento híbrido da Seção 4.2 foi usado para lidar com falhas do magnetômetro, i.e., vieses nas medidas, ruído gerado por forte interferência eletromagnética e falhas momentâneas de comunicação com o computador embarcado, evitando que os filtros híbridos tivessem suas estimativas degradadas por medições corrompidas.

5.2 SIMULAÇÕES

A trajetória usada nas simulações é mostrada na Figura 5.1. Partindo do solo, a aeronave segue uma rota helicoidal por 40 segundos, durante os quais medidas dos sensores são lidas e gravadas em um período de amostragem de 10 ms. As variâncias dos sensores são mostradas na Tabela 5.1. Cinco diferentes estimadores foram avaliados: o FKE [45]; o HDFF [43]; o MHMF [88]; o M³H [20]; e o MHMF-2 apresentado na Seção 4.5. Procurando verificar se os filtros estavam corretamente implementados e ajustados, realizou-se uma série de simulações com medidas perturbadas apenas por ruído de medição usual.

Tabela 5.1: Variâncias dos sensores para simulações não-perturbadas

	σ_X^2	σ_Y^2	σ_Z^2
Acelerômetro [$(\frac{m}{s^2})^2$]	0,4343	0,4083	0,3894
Girômetro [$(\frac{rad}{s})^2$]	2,2009e-06	1,7135e-06	13,820e-06
GPS _{pos} [$(m)^2$]	4,0	4,0	9,0
GPS _{vel} [$(\frac{m}{s})^2$]	0,04	0,04	0,09
Magnetômetro [$(\mu T)^2$]	0,0039	7,5076e-04	0,0030

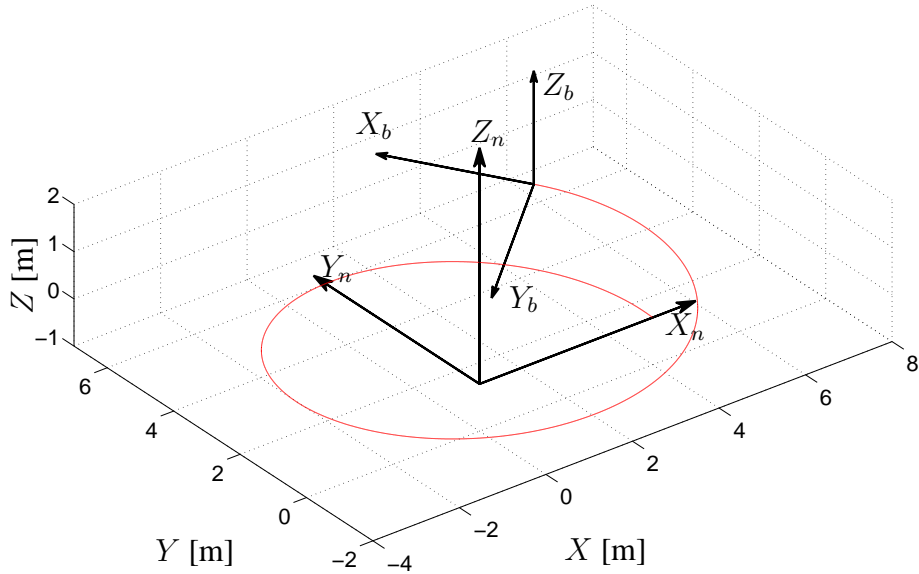


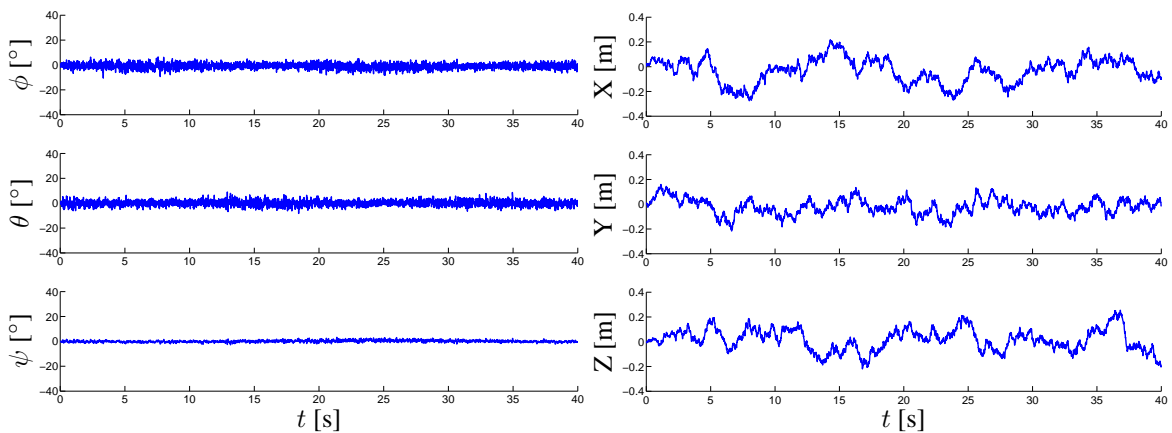
Figura 5.1: Trajetória helicoidal da aeronave durante as simulações.

Durante estes testes preliminares, todos os filtros apresentaram desempenho praticamente idêntico ao mostrado na Figura 5.2, que corresponde aos resultados do FKE. Assim, como pode ser visto na Tabela 5.2, o FKE e os filtros MM foram todos capazes de estimar corretamente o estado do sistema no caso sem perturbações, visto que o erro RMS para uma dada variável é o mesmo para todos os filtros. Nesta situação, o modelo de medição (3.33)-(3.37) é suficiente para representar todas as medições de saída do sistema, tornando o FKE capaz de prover estimativas de estado confiáveis. A presença de um único modelo de medição válido claramente não afetou a qualidade das estimativas dos algoritmos MM, que permaneceu igual à qualidade do FKE. Procurando melhor comparar o M³H, o MHMF e o MHMF-2, os mesmos valores foram selecionados para os seus parâmetros comuns, i.e., uma profundidade de fusão de hipóteses $d = 2$ e um limiar de eliminação de hipóteses $\epsilon = 0,05$. Ademais, o parâmetro l^{max} do M³H, que limita o número máximo de hipóteses sendo rastreadas pelo filtro a cada instante de tempo, não foi usado, de forma que se pudesse comparar seu método de fusão de hipóteses com a abordagem do MHMF-2. Em relação à condição inicial $\hat{\Pi}_0$ para a MPT, os filtros HDFS, MHMF e MHMF-2 assumiram completo desconhecimento inicial acerca das probabilidades de transição, visto que estes algoritmos são capazes de estimar a MPT *online*. O M³H, por outro lado, assume que Π é um parâmetro dado que deve ser devidamente escolhido. Uma vez que a MPT verdadeira usada para geração dos dados de simulação é o melhor valor possível para ajustar o M³H, assumiu-se conhecimento perfeito das probabilidades de transição entre modos para este filtro.

A partir da análise da Tabela 5.2, nota-se que houve diferenças com relação ao número médio de hipóteses consideradas pelos filtros durante o período de simulação, algo que afeta diretamente o seu custo computacional. O FKE é obviamente a escolha mais leve, visto que envolve o cálculo de apenas um filtro a todo instante. Contudo, o M³H e o MHMF-2 mostraram apenas um ligeiro aumento no número médio de hipóteses graças aos seus passos

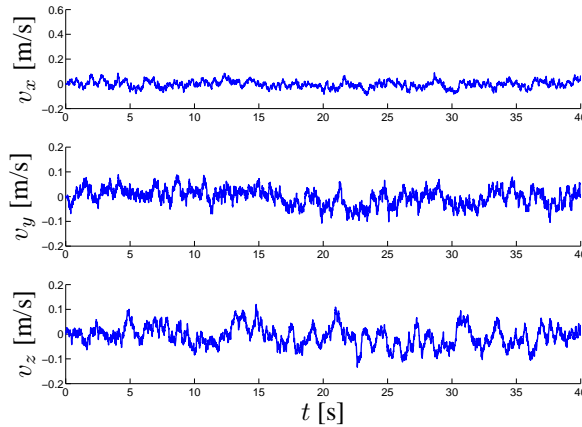
Tabela 5.2: Erro RMS para uma típica simulação não-perturbada e número de hipóteses

Erro RMS	FKE	M ³ H	HDFP	MHMF	MHMF-2
Rolagem			0,040		
Arfagem			0,037		
Guinada			0,100		
Posição X			0,105		
Posição Y			0,067		
Posição Z			0,090		
Hipóteses	1	1,004	10	1,0612	1,005



(a) Erro de atitude.

(b) Erro de posição.



(c) Erro de velocidade.

Figura 5.2: Desempenho do FKE com medições perturbadas apenas por ruído de medição usual.

de fusão e eliminação de hipóteses. É importante salientar que, muito embora o M³H e o MHMF-2 tenham usado o mesmo conjunto de dados, estes filtros não operaram em igualdade de condições. Enquanto o M³H gozava de conhecimento absoluto acerca da MPT, o MHMF-2 partiu de uma situação de completa ignorância. Todavia, o passo de eliminação de hipóteses mais informado do MHMF-2, discutido na Seção 4.5, foi capaz de compensar esta

desvantagem, dando ao MHMF-2 o mesmo desempenho do M³H em termos de erro RMS e praticamente o mesmo custo computacional. Percebe-se a importância deste fato ao se observar os resultados do MHMF. Em razão deste filtro realizar uma eliminação de hipóteses similar ao M³H, em que hipóteses são eliminadas antes da correção de suas probabilidades, a informação perdida neste processo prejudicou o algoritmo de estimação da MPT, forçando o MHMF a conservar um número maior de hipóteses durante as primeiras iterações. Finalmente, o custo computacional do HDFF é notavelmente maior, posto que este filtro considera um número fixo de hipóteses sem passo de eliminação, assim como o IMM. De fato, o IMM pode ser visto como um caso particular do HDFF em que a MPT é um parâmetro dado. Uma vez verificada a correta operação dos filtros em situações de medidas não-perturbadas, as simulações prosseguiram no sentido de reproduzir situações de falhas dos sensores, assim como mostrado na Figura 5.3.

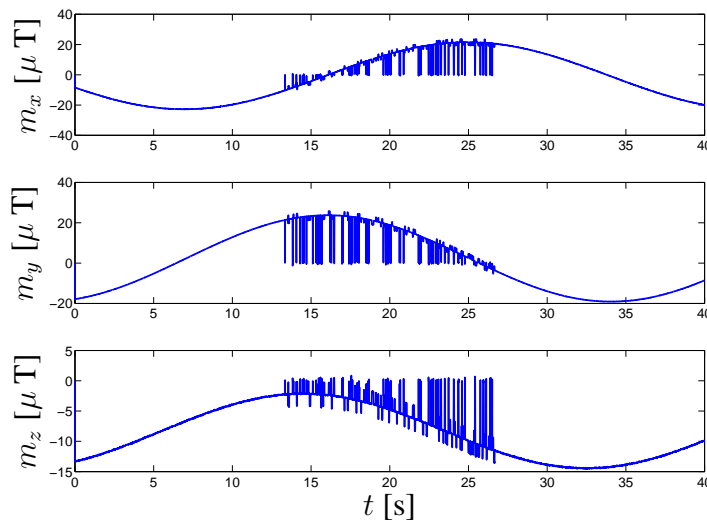


Figura 5.3: Medidas do magnetômetro para uma simulação perturbada típica.

As perturbações consideradas para o magnetômetro na Figura 5.3 são desconexões momentâneas do sensor, forte interferência sobre o sinal e viés das medidas, todas elas acontecendo apenas durante o segundo terço do período de simulação. Nestas situações desfavoráveis, o modelo apresentado na Tabela 3.1 da Seção 3.5.6 foi usado para descrever as medidas do magnetômetro. Considerando a notação da Seção 3.5.6, os parâmetros de simulação em situações de falha usados pelos filtros MM foram

$$\begin{aligned}
 P_{disc} &= \mathbb{I} \left(\frac{1}{3} \right)^2, \\
 P_{bias} &= \begin{bmatrix} 0.0389 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0075 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0298 \end{bmatrix}, \\
 b_{bias} &= 2.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Tabela 5.3: Erro RMS para uma típica simulação perturbada

Erro RMS	FKE	MHMF	M ³ H	HDFP	MHMF-2
Rolagem	0,064			0,042	
Arfagem	0,057			0,038	
Guinada	0,236			0,173	
Posição X	0,089			0,089	
Posição Y	0,099			0,099	
Posição Z	0,130			0,130	

Procurando simular conhecimento impreciso com respeito ao comportamento do sistema, os parâmetros em (5.1) são quatro vezes maiores do que aqueles usados para gerar os dados simulados da Figura 5.3. A discrepância entre estes dois conjuntos de dados atua como uma barreira adicional para a correta detecção dos modos de operação do sistema, visto que a determinação de qual modo gerou um vetor de medições particular torna-se incerta.

Uma série de experimentos foi realizada usando os dados simulados correspondendo à Figura 5.3, cada um deles envolvendo diferentes parâmetros de ajuste para os estimadores de estado. Para as situações em que os filtros foram capazes de contornar o problema de corrupção das medidas sensoriais, o melhor erro RMS encontrado é mostrado na Tabela 5.3. Porém, existiram também experimentos em que a corrupção de dados foi intensa o bastante para impedir que os filtros pudessem realizar a estimação de estados corretamente, levando à divergência de suas estimativas. Finalmente, algumas escolhas particulares de parâmetros não tornaram os filtros instáveis, mas resultaram em erros RMS piores do que aqueles mostrados na Tabela 5.3. Um breve resumo de alguns resultados típicos de simulação são mostrados na Tabela 5.4. Para o restante desta discussão e para os resultados da Tabela 5.4, considere a notação

$$\Pi_{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha & \frac{1-\alpha}{9} & \dots & \frac{1-\alpha}{9} \\ \frac{1-\alpha}{9} & \alpha & \dots & \frac{1-\alpha}{9} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1-\alpha}{9} \\ \frac{1-\alpha}{9} & \frac{1-\alpha}{9} & \dots & \alpha \end{bmatrix}$$

para a estimativa inicial da MPT ($\hat{\Pi}_0$). No caso de completa ignorância acerca das probabilidades de transição, existe a correspondência $\Pi_{ig} = \Pi_{0,1}$, enquanto que $\hat{\Pi}_0 = \Pi$ corresponde ao perfeito conhecimento da MPT. Um valor “Bom” na Tabela 5.4 corresponde a erros RMS iguais àqueles mostrados na Tabela 5.3, enquanto que “Ruim” diz respeito a erros RMS piores.

Diferentemente dos resultados das simulações não-perturbadas da Figura 5.2, o modelo matemático único usado pelo FKE não foi suficiente para descrever as saídas do sistema de localização durante operação sob perturbações do ambiente. Em razão dos desvios mostra-

Tabela 5.4: Parâmetros e resultados de convergência para a simulação perturbada.

	d	ϵ	$\hat{\Pi}_0$	Convergência	Erro RMS	Número médio de hip.
FKE	—	—	—	Sim	Ruim	1
HDFF	1	—	Π_{ig}	Sim	Bom	10
MHMF	2	0	Π_{ig}	Sim	Bom	54,949
	2	0,001	Π_{ig}	Sim	Ruim	10,222
	2	0,002	Π_{ig}	Sim	Ruim	5,300
	2	[0,003; 0,005]	Π_{ig}	Não	—	—
	2	[0,01; 0,05]	Π_{ig}	Não	—	—
M ³ H	2	0	Π	Sim	Bom	99,885
	2	0	$\Pi_{0,8}$	Sim	Bom	99,885
	2	0,001	Π	Sim	Bom	10,560
	2	0,005	Π	Sim	Bom	10,089
	2	0,01	$\Pi_{0,7}$	Sim	Bom	10,332
	2	0,02	$\Pi_{0,8}$	Sim	Bom	9,400
	2	0,03	$\Pi_{0,8}$	Não	—	—
	2	0,03	$\Pi_{0,7}$	Sim	Bom	9,240
	2	[0,04; 0,05]	$\Pi_{0,7}$	Não	—	—
	2	0,05	Π_{ig}	Sim	Bom	15,646
MHMF-2 ^a	2	0,05	Π_{ig}	Sim	Bom	1,048
	2	0,10	Π_{ig}	Sim	Bom	1,039
	2	0,20	Π_{ig}	Sim	Bom	1,031

^aNúmero médio de hipóteses antes do passo de correção do filtro.

dos na Figura 5.3 terem sido incorporados pelas estimativas do FKE ao utilizar (3.37) como o modelo de medição, enquanto que (3.39)-(3.40) teria sido mais apropriado, a matriz de rotação em (3.6) resultante das medições perturbadas causou degradação severa das estimativas, como pode ser claramente visto na Tabela 5.3 e na Figura 5.4(a). As equações referidas encontram-se repetidas a seguir por conveniência.

$$C_n^b(q_n^b) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

$$m_{mag,k}^b = (C_{n,k}^b)^T m_E^n + \epsilon_{m,k}, \quad (3.37)$$

$$m_{disc,k}^b = 0 + \epsilon_{disc,k}, \quad (3.39)$$

$$m_{bias,k}^b = (C_{n,k}^b)^T m_E^n + b_{bias,k} + \epsilon_{bias,k}. \quad (3.40)$$

Em seguida ao FKE, o primeiro filtro MM testado foi o HDFF, que pode ser visto como o

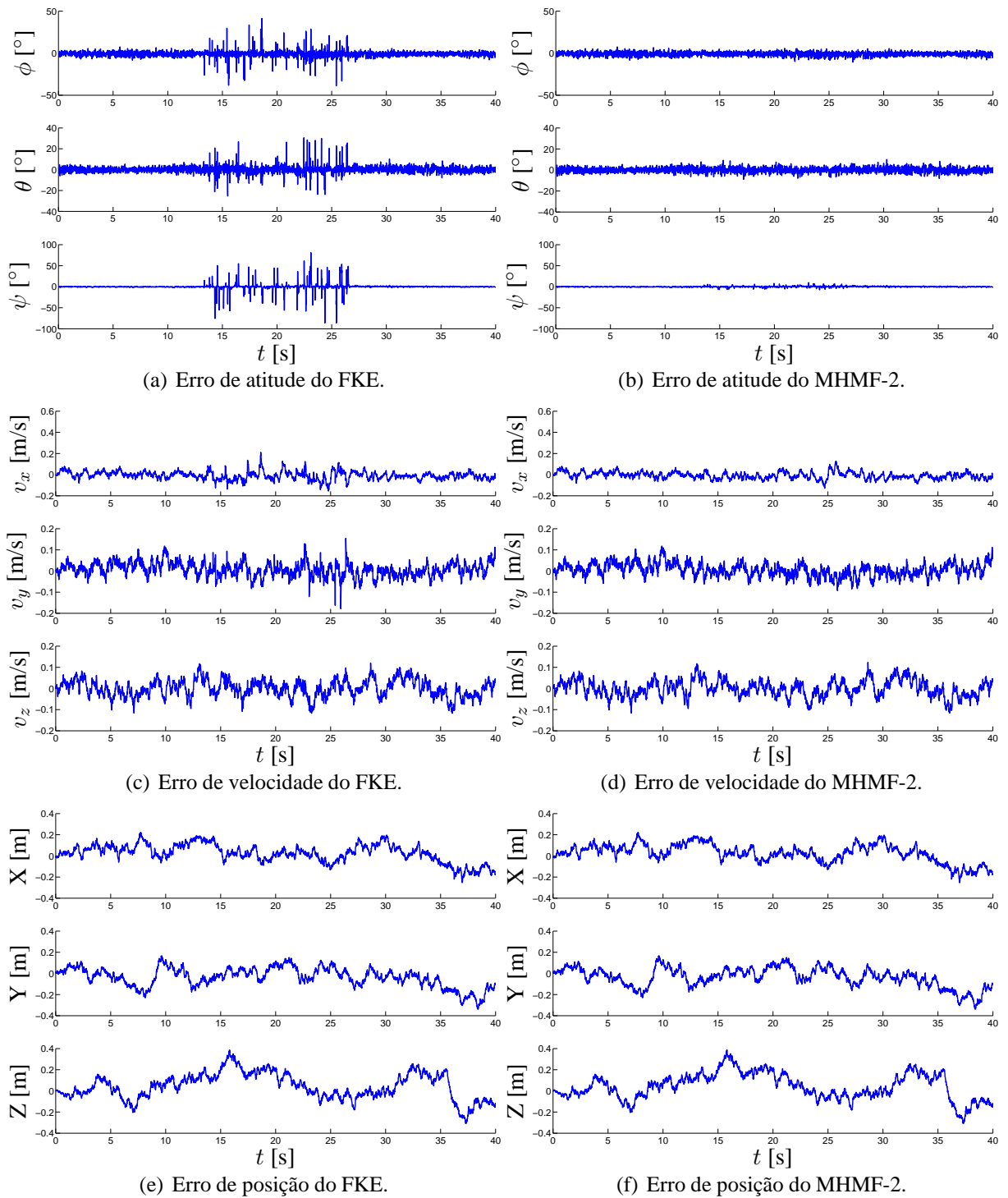


Figura 5.4: Comparação do desempenho entre o MHMF-2 e o FKE operando sob fortes perturbações.

IMM acrescido de um passo de estimação da MPT. Considerando os modos do sistema na Tabela 3.1 e partindo de nenhum conhecimento prévio acerca das probabilidades de transição, o HDFS mostrou-se bastante estável durante todas as simulações e foi capaz de prover boas estimativas de estado mesmo na presença de forte corrupção das medidas, como pode ser visto nas Tabelas 5.3 e 5.4. Este filtro, contudo, herda do IMM o problema de grande custo

computacional quando são considerados muitos modos para o sistema. Diferentemente dos outros filtros MM avaliados aqui, que incluem um passo de eliminação de hipóteses muito pouco prováveis, o HDFS mantém um banco de FKEs de tamanho fixo e igual a M em todos os instantes de tempo, em que M é o número de modos do sistema. Este fato representa um claro desperdício de poder computacional, visto que estimativas provenientes de hipóteses improváveis terão uma influência quase insignificante na saída do filtro, ainda que elas consumam a mesma quantidade de recursos que as estimativas de alta probabilidade.

O MHMF é uma generalização do HDFS¹, dado que este filtro tem profundidade de fusão de hipóteses variável d e incorpora um passo de eliminação de hipóteses com probabilidades muito baixas. Entretanto, problemas de estabilidade surgem quando o limiar de eliminação ϵ não é escolhido adequadamente. Considere os resultados de estimação para o MHMF evidenciados na Tabela 5.4. O caso em que $d = 2$ e $\epsilon = 0$ investigou possíveis melhorias nos erros de estimação por meio do aumento do número de hipóteses consideradas pelo filtro. Além do evidente e inoportuno crescimento do número médio de hipóteses calculadas, os resultados não mostram ganhos quando comparados aos do HDFS. Portanto, diferentes valores para o limiar ϵ foram testados procurando manter o mesmo desempenho a um custo computacional menor. Infelizmente, não houve melhoria no desempenho ao se escolher $\epsilon > 0$ e, mesmo para valores muito pequenos deste limiar, o MHMF tornou-se instável devido à incorreta eliminação de hipóteses. Este problema, que foi previamente discutido na Seção 4.5, advém do fato de que o MHMF, de maneira similar ao M^3H , realiza seu passo de eliminação logo depois da predição das probabilidades das hipóteses, ignorando a medida de saída atual do sistema. Ao se descartar esta informação adicional, o filtro torna-se mais susceptível à degradação de suas estimativas pela escolha incorreta dos modos de operação, muitas vezes levando à instabilidade.

A estratégia de gerenciamento de hipóteses adotada pelo filtro M^3H difere daquelas do HDFS, do MHMF e do MHMF-2, pois não há uma mistura de hipóteses semelhante ao que acontece no caso do IMM. Em vez disso, o M^3H apenas funde hipóteses (soma suas probabilidades) com o mesmo histórico de modos nas últimas d iterações, mantendo o vetor de estados e a matriz de covariâncias da hipótese com maior verossimilhança. De acordo com [20], o M^3H é uma excelente alternativa ao amplamente usado e reconhecido IMM, tornando-o um algoritmo interessante para comparação de desempenho. O desempenho do M^3H foi avaliado considerando-se vários diferentes conjuntos de valores para ϵ e $\hat{\Pi}_0$, assim como mostrado na Tabela 5.4. O primeiro teste procurou verificar se a estratégia de gerenciamento de hipóteses do M^3H resultava em ganhos de desempenho quando comparada ao passo de mistura de hipóteses do MHMF. Operando na ausência de eliminação de hipóteses ($\epsilon = 0$) e sobre o mesmo conjunto de dados, o M^3H despendeu um custo computacional quase duas vezes maior do que o necessário para o MHMF para a mesma qualidade das estimativas. Mudanças em $\hat{\Pi}_0$ não tiveram grande influência sobre os resultados, como pode ser

¹Escolher $d = 1$ e $\epsilon = 0$ para o MHMF resulta nas equações do HDFS.

visto pelo segundo teste. Deve-se notar, no entanto, que o M^3H não apresentou os mesmos problemas de estabilidade do MHMF. De fato, uma vez que tende a conservar um maior número de hipóteses, o M^3H mostrou-se menos sensível ao limiar de eliminação ϵ do que o MHMF, indicando uma capacidade de operação estável mesmo no caso de uma escolha ruim de parâmetros para o filtro. A respeito de estabilidade, se probabilidades muito baixas fossem atribuídas aos modos representando falhas do sistema na MPT, o passo de predição das probabilidades das hipóteses usando o modelo de CM tendia a colocar todas as hipóteses de falha do sistema abaixo do limiar de eliminação, levando-as a serem erroneamente eliminadas mesmo na presença de medições corrompidas e frequentemente tornando o filtro instável. De forma a assegurar operação estável, a MPT deveria ser escolhida com suas probabilidades “bem distribuídas” entre seus elementos, i.e., probabilidades de transição mais altas deveriam ser atribuídas a todos os modos de falha de forma a evitar sua eliminação prematura. Infelizmente, esta escolha de parâmetros tinha o efeito negativo de aumentar a carga computacional e as tentativas para reduzi-la mostraram-se ineficientes. Valores pequenos de ϵ resultavam em operação estável para o M^3H , mas o número de hipóteses e, conseqüentemente, a carga computacional permaneciam altos. À medida em que ϵ era aumentado, percebiam-se ligeiras mudanças no número de hipóteses até que o parâmetro atingisse um valor crítico, acima do qual as hipóteses representando modos de falha eram eliminadas e o filtro divergia.

O último filtro MM avaliado foi o MHMF-2, cujos resultados mostrados na Tabela 5.4 mostram ganhos significativos de desempenho mesmo quando comparados aos melhores resultados dos filtros anteriores. Juntamente com o HDFS e ao contrário do MHMF e do M^3H , o MHMF-2 não mostrou problemas de divergência quando em operação sob fortes perturbações e foi capaz de prover estimativas confiáveis e estáveis com todos os parâmetros testados. Além disso, a novidade incorporada no passo de eliminação de hipóteses do MHMF-2 teve dois efeitos benéficos: evitou que o filtro eliminasse erroneamente hipóteses correspondendo a falhas ocorrendo no momento; e reduziu a carga média computacional do MHMF-2 para um valor comparável ao FKE (quase nove vezes menor do que os melhores casos do HDFS e do M^3H) sem afetar a qualidade de suas estimativas. Assim como ressaltado na Tabela 5.4, deve-se notar que o número médio de hipóteses para o MHMF-2 é calculado antes do passo de correção das estimativas, ou seja, não considera o número de hipóteses durante o passo de predição, que antecede a eliminação de hipóteses. Ainda que isso claramente cause um aumento da carga computacional quando comparado com o MHMF e o M^3H , em que as hipóteses são eliminadas ainda mesmo antes da predição das estimativas, o passo de predição do FKE pode ser visto como uma simples substituição de valores em uma função e, portanto, não representa uma operação tão complexa ou onerosa quando comparada às inversões matriciais envolvidas no passo de correção [65]. Ademais, realizar a eliminação de hipóteses após o passo de predição dá ao filtro uma maior quantidade de informações para melhor decidir a relevância de cada hipótese, implicando ganhos de desempenho que excedem largamente os custos das cálculos adicionais necessários. Os resultados na Figura 5.4 mostram

o desempenho do MHMF-2 e do FKE operando com as medidas corrompidas mostradas na Figura 5.3. A comparação dos erros de estimação das Figuras 5.4(a) e 5.4(b) é uma clara indicação das vantagens da abordagem híbrida do MHMF-2 sobre a estimação clássica do FKE na presença de medidas corrompidas. Enquanto o MHMF-2 manteve bom desempenho durante todo o experimento, mostrando-se capaz de rejeitar as perturbações provenientes das falhas mostradas na Figura 5.3, o FKE incorporou estas falhas às suas estimativas corrigidas, gerando erros de orientação muitas vezes superiores a 50° . Problemas nas estimativas do FKE também podem ser vistos quando se comparam os erros de velocidade da Figura 5.4(c) aos da Figura 5.4(d). Contudo, estes desvios são fortemente amenizados pelas medidas de velocidade fornecidas pelo GPS, que tendem a abrandar o efeito deletério das medidas corrompidas do magnetômetro. Por fim, a comparação das Figuras 5.4(e) e 5.4(f) mostra que suas estimativas são praticamente idênticas. Dois fatores contribuem decisivamente para isso. Em primeiro lugar, deve-se notar que os gráficos das Figuras 5.4(e) e 5.4(f) correspondem, respectivamente, à integração no tempo das curvas das Figuras 5.4(c) e 5.4(d), o que naturalmente amortece picos de ruído. Em segundo lugar, o GPS fornece diretamente medidas de posição da aeronave, o que praticamente elimina a dependência das estimativas de posição em relação às medidas do magnetômetro.

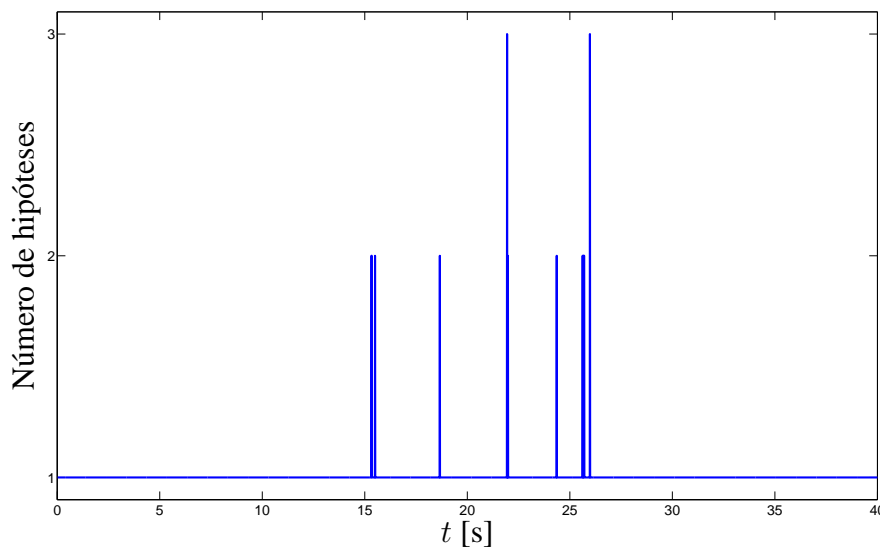


Figura 5.5: Número de hipóteses calculadas pelo MHMF-2.

O aspecto final considerado para o MHMF-2 foi a possibilidade de sua implementação em um sistema prático operando em tempo real. Neste tipo de situação, é imprescindível que o cálculo das operações do estimador de estados seja concluído dentro de um intervalo definido de tempo, visto que deve haver tempo hábil para execução das outras tarefas do escalonador. Sendo assim, é necessário considerar não somente o número médio de hipóteses do filtro durante sua execução, mas também o número máximo de hipóteses, visto que este representa o pior caso de tempo de cálculo. A Figura 5.5 mostra o número total de hipóteses

consideradas pelo MHMF-2 durante a simulação que corresponde à última linha da Tabela 5.4, em que foi ignorado apenas o instante de ajustes iniciais. Durante os períodos de correto funcionamento do magnetômetro (primeira e última partes do experimento), o custo computacional do MHMF-2 é igual ao do FKE, ou seja, apenas uma hipótese é levada em conta. Por outro lado, a ocorrência de nove tipos diferentes de falhas do sensor durante o segundo terço da simulação leva o estimador a considerar um número maior de hipóteses para tornar o sistema de localização robusto a medidas corrompidas. O resultado disso são instantes em que duas ou três hipóteses são consideradas simultaneamente pelo MHMF-2, fazendo crescer sua complexidade computacional. Deve-se notar, todavia, que este aumento de carga é pequeno frente aos dez modos considerados e ocorre de maneira pontual (duração de um instante amostral) e pouco freqüente, dando ao MHMF-2 a possibilidade de ser implementado em um sistema de localização real que não seja executado próximo aos limites de operação do *hardware*.

5.3 EXPERIMENTO REAL DE NAVEGAÇÃO

Depois de validados em simulação, compararam-se o MHMF-2, o M³H e o FKE usando dados reais de navegação. Neste experimento, um sistema de localização com sensores semelhantes² aos descritos no Capítulo 3 foi movido ao redor do *campus* Darcy Ribeiro da Universidade de Brasília a bordo de um carro, como mostrado na Figura 5.6. Conforme o veículo seguia sua rota, o sistema era manualmente rotacionado em torno dos eixos X e Y em movimentos cíclicos, alterando seus ângulos de rolagem (ϕ) e arfagem (θ), enquanto o ângulo de guinada (ψ) seguia a orientação da pista. Assim como detalhado na Seção 3.6.4, a sensibilidade das equações de linearização do FKE a diferenças de norma entre vetores de referência e medidos pelos sensores, todas as leituras do magnetômetro e do acelerômetro utilizadas para correção da atitude foram normalizadas. Devido a esta operação não-linear, as falhas do magnetômetro correspondendo a vieses do sensor e falhas de comunicação tornaram-se virtualmente indistinguíveis, fazendo com que fosse necessário a consideração de apenas dois modos de operação: normal ($m_k = 1$) e falha do magnetômetro ($m_k = 2$).

As leituras do magnetômetro adquiridas durante o experimento são mostradas na Figura 5.7, em que as setas evidenciam os momentos em que o sensor proveu medições corrompidas. Usando os dados dos instrumentos do sistema de localização, o FKE, o M³H e o MHMF-2 geraram os resultados mostrados na Figura 5.8. Assim como mostrado nas Figuras 5.8(a)-5.8(e), todos os três filtros tiveram desempenho praticamente idêntico ao rastrear a posição 3D da aeronave. Este comportamento também pode ser observado nas Figuras

²Em razão de questões burocráticas relacionadas à continuidade do projeto descrito na Seção 3.2, não foi possível utilizar exatamente os sensores que formam a instrumentação do helimodelo neste experimento. Para contornar este problema, um sistema de localização com sensores semelhantes foi montado por alunos do laboratório e utilizado para geração dos resultados desta seção.

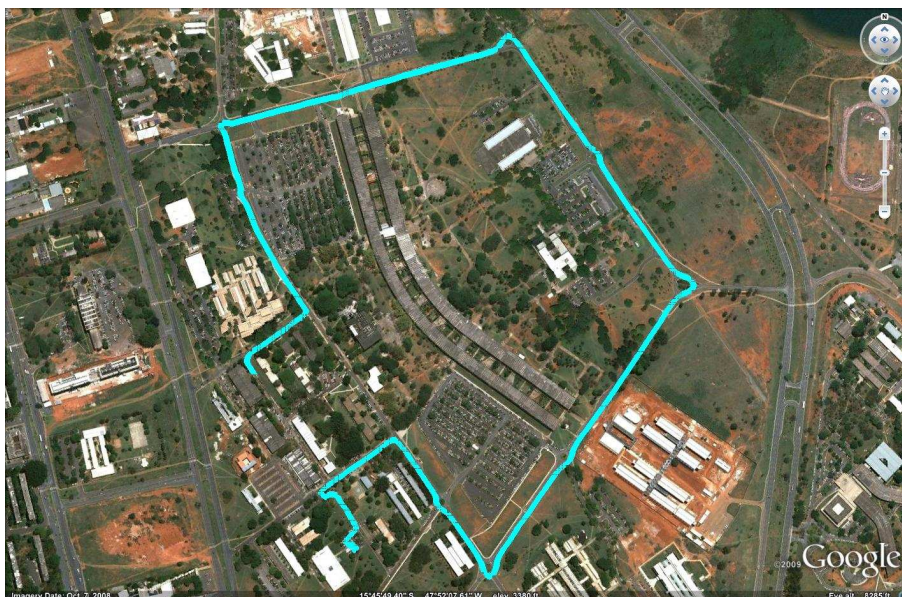


Figura 5.6: Percurso no *campus* Darcy Ribeiro (Fonte: Google Earth, $15^{\circ}45'49.40''S$ e $47^{\circ}52'07.61''W$, Brasília, Brasil. Data da imagem: 10/07/2008).

Tabela 5.5: Carga computacional usando dados reais dos sensores

	FKE	MHMF-2	M ³ H
Número médio de hip.	1,0	1,0001	2,0001

5.4(e) e 5.4(f), que são praticamente as mesmas, uma vez que a influência do magnetômetro sobre as estimativas de posição é pequena quando comparada a do GPS e da IMU. Existem, contudo, perturbações nas estimativas de atitude do FKE, apontadas na Figura 5.8(f), que coincidem com as falhas do magnetômetro na Figura 5.7. Ainda que estas perturbações não tenham sido muito significativas, visto que as falhas do magnetômetro foram raras e duraram apenas alguns milissegundos, até mesmo estas medidas espúrias adquiridas em condições bastante favoráveis foram capazes de introduzir perturbações perceptíveis nas estimativas do FKE. Por outro lado, estas perturbações não são encontradas nas estimativas de atitude do MHMF-2 nem do M³H, que são praticamente as mesmas. Isto se deve ao fato de ambos os filtros serem capazes de detectar medidas corrompidas, mesmo que o M³H tenha apresentado um falso positivo em torno de $t = 393$ s. À medida em que falhas dos sensores, no entanto, se tornassem mais frequentes e severas, o FKE sofreria cada vez mais de degradação de suas medidas, podendo chegar a resultados inaceitáveis similares aos da Figura 5.4(a).

Como última análise, considere os resultados de carga computacional mostrados na Tabela 5.5. Ainda que o FKE tenha sido, mais uma vez, a opção mais leve, suas estimativas não se mostraram robustas mesmo a perturbações naturais do sensor. Portanto, algum cuidado deve ser tomado a se utilizar este estimador em sistemas robóticos operando em ambientes

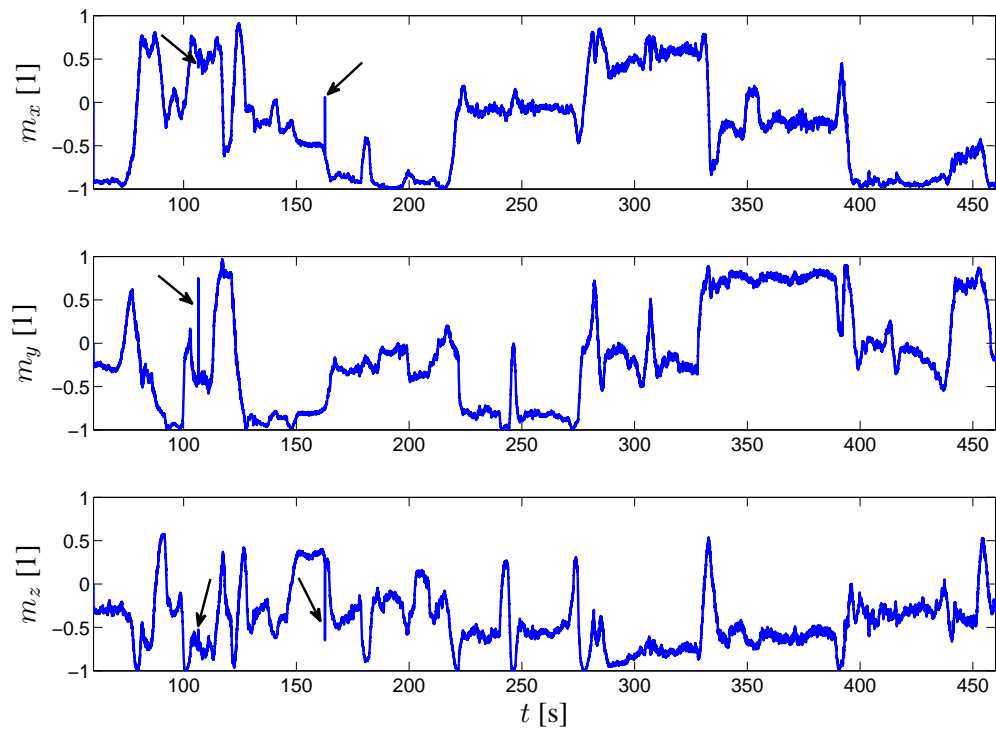


Figura 5.7: Medições do magnetômetro para o experimento real de navegação. Setas evidenciam falhas do sensor.

reais e hostis. O MHMF-2, por outro lado, foi capaz de contornar o problema de medições corrompidas e manteve a carga computacional praticamente idêntica àquela do FKE. O M^3H também mostrou sua utilidade como estimador de estado robusto, mas ao custo de um aumento de carga computacional de quase 100% quando comparado ao MHMF-2. Logo, mais uma vez o MHMF-2 mostrou-se a melhor alternativa em termos de robustez, erro RMS e carga computacional.

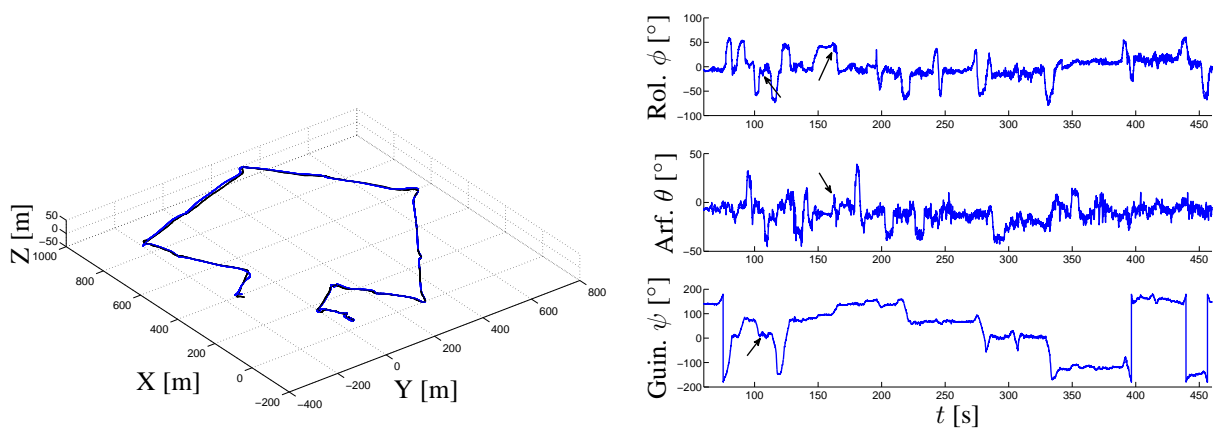
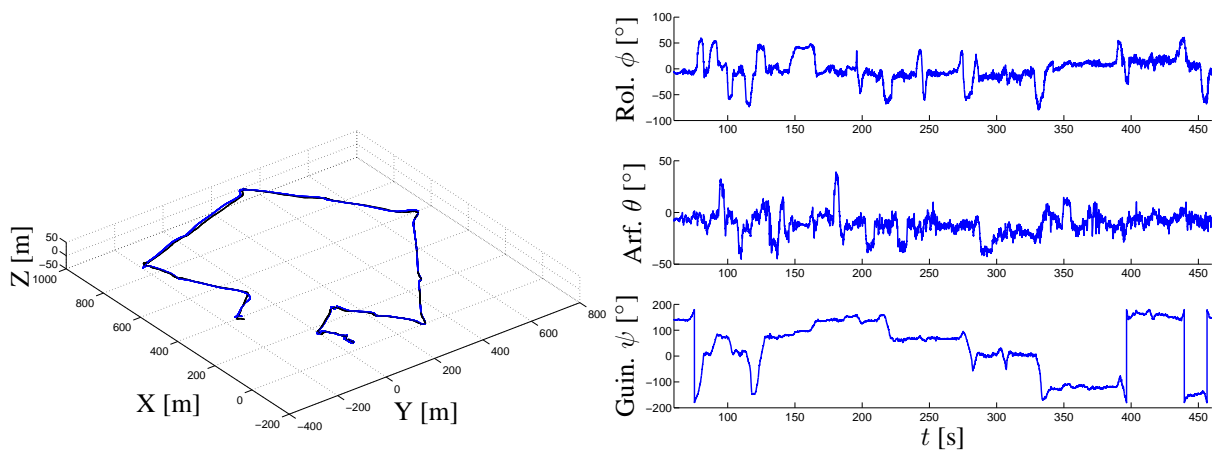
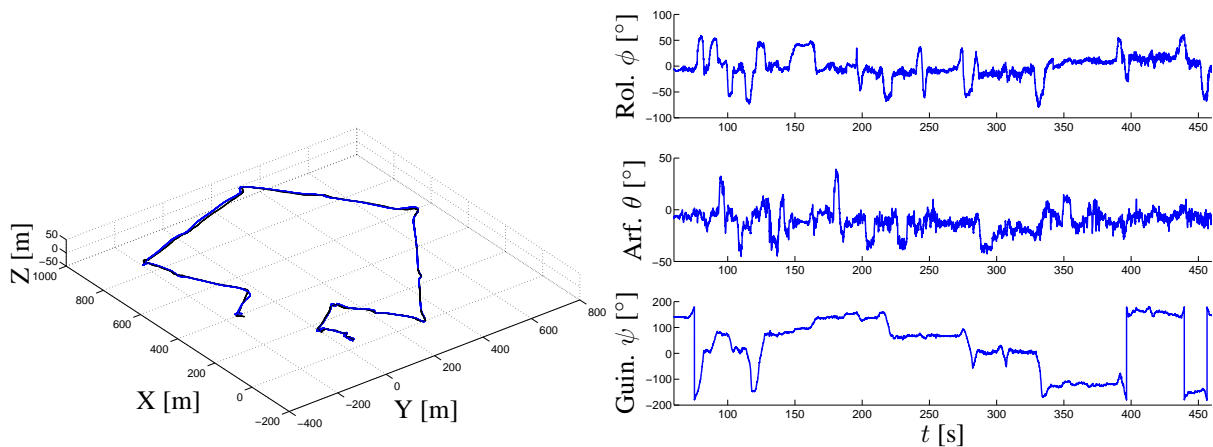


Figura 5.8: Resultados de estimação para o MHMF-2, o M³H e o FKE em um experimento real de navegação.

6 CONCLUSÕES

“Tutte le verità sono facili da capire, una volta che vengono scoperti, il punto è quello di scoprirle loro.”

Galileo Galilei

6.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho tratou do tema de filtragem estocástica para sistemas dinâmicos híbridos, mais especificamente do caso particular de sistemas a múltiplos modelos, em que uma das variáveis discretas de estado denota possíveis mudanças de modelo matemático entre os diferentes modos de operação. Durante a revisão bibliográfica a respeito de métodos disponíveis para a estimação de estados deste tipo de sistema, deu-se ênfase ao detalhamento matemático das inovações introduzidas à época de sua proposição pelo amplamente difundido filtro IMM, algoritmo de notável e reconhecida importância até os dias de hoje em aplicações de sistemas híbridos a situações práticas, tendo ele influenciado decisivamente os resultados aqui apresentados. De fato, verificou-se que a generalização das equações do IMM feita pelos algoritmos propostos neste trabalho (HDFE, MHMF e MHMF-2) proporcionou-lhes ganhos expressivos de desempenho durante testes utilizando tanto dados reais, quanto simulados, do sistema de localização tridimensional de um helimodelo para inspeção robotizada de linhas de transmissão de energia elétrica. Nesta análise comparativa, foram utilizados também o FKE clássico e o M^3H , um filtro recente para sistemas híbridos que se apresenta como uma alternativa viável e de melhor desempenho do que o IMM. Todo o equacionamento matemático do sistema de localização da aeronave foi feito, dando-se ênfase aos diferentes métodos de representação da atitude do corpo, sua extração a partir de medidas dos sensores embarcados e também às implicações teóricas nas equações dos estimadores decorrentes da restrição de norma unitária de quatérnios. As falhas ocasionais do magnetômetro, sensor essencial no processo de correção da atitude do VANT, foram tratadas por meio do paradigma de modelagem de sistemas híbridos, uma vez que este sensor é fortemente susceptível a problemas advindos da interferência eletromagnética das linhas de transmissão e também de desconexões temporárias entre ele e o computador embarcado. Dentre todos os algoritmos avaliados, o MHMF-2 mostrou ser a melhor opção em termos do erro de estimação em situações de falha dos sensores e, quando comparado a outros filtros que utilizam a abordagem de fusão de múltiplas hipóteses, também com relação à complexidade computacional.

A abordagem de sistemas híbridos trazida em [43] para modelar sistemas dinâmicos sujeitos a falhas de operação mostrou-se viável e eficiente, assim como mostrado pelos resultados numéricos do Capítulo 5, mas não se pretende que esta seja considerada uma solução

definitiva para o problema. Dependendo da dinâmica das falhas, podem existir alternativas mais eficientes à abordagem híbrida apresentada neste trabalho. Considere a situação, por exemplo, em que ocorrem falhas de posicionamento de peças em uma linha de montagem industrial ocasionadas por desgaste de seus atuadores, principalmente o afrouxamento dos mancais dos motores e envelhecimento de seus componentes. Embora modelar a evolução do processo como um todo utilizando sistemas híbridos seja possível, uma vez que este tipo de falha é geralmente conhecido dos fabricantes dos equipamentos, a sua dinâmica lenta não a recomenda. Nestas situações, seria mais interessante incluir os parâmetros do modelo dos atuadores no modelo matemático do processo e estimá-los *online*, assim como foi feito para os vieses dos acelerômetros na Seção 3.5.4. Estes, no entanto, são problemas de falhas de longo prazo, cuja evolução se dá em um processo contínuo. A abordagem híbrida deste trabalho, por outro lado, encontra seu maior campo de aplicação no contexto de falhas repentinas e que ocorrem sem aviso prévio, podendo levar a consequências catastróficas. Um exemplo emblemático deste tipo de situação são os graves acidentes que podem ocorrer caso haja falhas inesperadas dos sensores de um sistema de localização para aeronaves, como aquele desenvolvido no Capítulo 3. A adoção de uma estratégia de sistemas híbridos para estimação de estados de nosso VANT para inspeção de linhas de transmissão foi motivada, principalmente, em decorrência da constatação de que a inclusão dos parâmetros do modelo no vetor de estados é infactível, visto que não há tempo hábil para convergência dos estados do filtro nos momentos de falha do magnetômetro. A maior demonstração da utilidade de nossa abordagem nestas situações está nos resultados numéricos da Seção 4.3.2 e do Capítulo 5, em que ocorre rápida divergência das estimativas do FKE na presença de falhas do magnetômetro, enquanto os filtros híbridos sempre mantêm bom desempenho. Até mesmo nos momentos em que é desconhecida a forma de manifestação das falhas, nossa abordagem híbrida continua a ser útil e simplifica-se para o caso de apenas dois modos de operação dos sensores: bom e mau funcionamento. Nestes casos, medidas de distância estatística (distância de Mahalanobis) incorporados aos nossos filtros servem ao propósito de detectar medidas de sensores muito diferentes do esperado, podendo servir como indicação de problemas. De fato, esta foi a estratégia adotada na análise da Seção 5.3, uma vez que os dados do acelerômetro e do magnetômetro passaram por transformações não-lineares de normalização (ver Seção 3.6.4) que prejudicaram a detecção de falhas.

É claro, pela análise do conteúdo do Capítulo 3, que a maior parte do texto é dedicada aos temas de representação de atitude, incluindo restrições e limitações intrínsecas de cada tipo de parametrização, e sua extração a partir de medidas de sensores embarcados. Tanta discussão é devida às não-linearidades das operações envolvendo a orientação do corpo, principalmente a sua correção a partir de medidas vetoriais, que impedem a obtenção de soluções ótimas para os problemas de estimação de atitude. Há, portanto, uma série de resultados disponíveis na literatura, todos eles apresentando um balanço diferente entre benefícios e prejuízos, dependendo da situação particular em análise, assim com ressaltado em [82]. A exposição a respeito de quatérnios, juntamente com os aspectos matemáticos

envolvendo a sua restrição de norma unitária, procuram fornecer ao leitor interessado em estender os resultados deste trabalho uma visão mais abrangente dos fundamentos por trás das diferentes técnicas existentes, resultados que geralmente encontram-se dispersos na literatura, e também ressaltar estudos de suma importância para a correta implementação dos resultados desta dissertação. Em textos informais, espera-se que as discussões do Capítulo 3 evitem que as soluções possivelmente complexas adotadas neste trabalho pareçam “tiradas da cartola”, gerando dúvidas sobre a possibilidade de uso de procedimentos mais simples. Caso se privasse o leitor dos fundamentos que basearam as escolhas tomadas, evitar-se-ia que ele se beneficiasse destas discussões para propor inovações a respeito do assunto, sendo ele, muitas vezes, condenado a passar pelo mesmo calvário de dúvidas e erros de implementação que os autores do trabalho previamente experimentaram.

Pretende-se que as inovações trazidas por este trabalho em seu Capítulo 4, principalmente o algoritmo do filtro MHMF-2, signifiquem um real avanço no campo científico de sistemas híbridos, em que se procurou dar aos algoritmos propostos tratamento tão aprofundado quanto aquele de referências consagradas da literatura na mesma área. A análise comparativa feita no Capítulo 5 tentou mostrar não só os ganhos dos algoritmos propostos, mas também as situações em que nossos filtros encontram suas limitações. Além disso, comparou-se o desempenho de nossos resultados àqueles de filtros clássicos e recentes, a fim de fornecer referências para o julgamento dos ganhos aferidos em termos dos erros de estimação e complexidade computacional. Uma questão por vezes abordada por revisores dos trabalhos científicos publicados e também por pessoas interessadas no assunto da dissertação diz respeito a demonstrações de convergência dos filtros propostos, mais especificamente do erro de estimação. Tendo recebido apenas um breve comentário no início do Capítulo 4, volta-se a esta questão no fechamento desta dissertação. Para sistemas lineares, existem métodos consagrados e formas fechadas para verificação de estabilidade envolvendo, em geral, o cálculo dos valores singulares das matrizes de evolução do processo ou também a utilização de funções candidatas de Lyapunov para análise de convergência. Passando, no entanto, ao caso de sistemas não-lineares genéricos, isto deixa de ser verdade. Para este tipo de sistema, análises de estabilidade estão fortemente atreladas à determinação, geralmente heurística, de funções de Lyapunov que assegurem a redução assintótica da energia dos estados, em que o termo energia é aqui entendido em um sentido mais amplo do que a simples capacidade de realizar trabalho. Contudo, este processo inexoravelmente envolve a derivada de funções não-lineares possivelmente não-triviais, exemplos das quais podem ser encontrados neste trabalho (ver Seção 3.6.1), tornando a análise complexa, senão infactível, caso hipóteses simplificadoras não sejam feitas com relação ao sistema não-linear em estudo. Para sistemas híbridos, uma analogia existe e pode ser encontrada em [5]. De maneira geral, a estabilidade no caso sistemas híbridos com modelos lineares pode ser feita por meio de uma única função candidata de Lyapunov, cuja energia decresce independentemente da seqüência de chaveamentos entre modos. Caso isto se mostre difícil, é suficiente mostrar que existe um conjunto de funções candidatas de Lyapunov estáveis, uma para cada modo do sistema,

e que sempre ocorre redução de energia nos momentos de retorno do sistema ao modo, ainda que ela possa aumentar nos instantes de chaveamento. Todavia, esta análise torna-se ainda mais difícil para sistemas híbridos não-lineares genéricos como os da Seção 4.2 e, a menos que se assuma uma estrutura particular para (4.1)-(4.2) que facilite a análise, ainda não estão disponíveis resultados de convergência para este tipo de sistema.

6.2 PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Seah et al. em [14] consideram um modelo híbrido para a decolagem de um avião em um aeroporto. Partindo do repouso, o avião inicialmente acelera horizontalmente na pista até chegar próximo a uma velocidade limite, momento no qual inicia a sua subida. Uma vez que é fisicamente impossível uma transição entre os modos de aceleração horizontal e subida em situações de baixa velocidade, a utilização de um modelo Markoviano para este tipo de transição necessitaria que informações de velocidade fossem incorporadas aos modos, permitindo capturar corretamente a dinâmica do sistema. Dessa forma, no lugar de se ter apenas um modo para aceleração horizontal e outro para subida, dever-se-ia discretizar as faixas da aeronave em intervalos (baixa, média e alta velocidade, por exemplo) para que, então, se pudesse definir as probabilidades de transição entre eles. Quanto maior o número de intervalos discretos, maior seria a precisão do modelo do filtro, mas sua complexidade computacional também tenderia a aumentar. Ainda que o modelo Markoviano para transições entre os modos do sistema tenha se mostrado bastante útil no contexto deste trabalho, formulações de sistemas híbridos que consideram transições dependentes também do vetor de estados contínuos [14] tenderiam a melhorar o desempenho dos filtros aqui propostos, pois as transições entre os diferentes modos do sistema poderiam ser mais fielmente modeladas sem, com isso, incorrer em uma aumento da complexidade dos algoritmos de estimação.

Outra possível fonte de melhorias seria testar outros filtros não-lineares nos algoritmos do Capítulo 4 em substituição ao FKE. Em razão de seu passo de linearização de primeira ordem, o FKE exige um ajuste minucioso de seus parâmetros para que sejam válidas suas hipóteses de linearidade local do sistema, sendo que nem mesmo isso pode garantir bom desempenho deste filtro nas situações em que modelos fortemente não-lineares estão sendo estimados. O FKU, por outro lado, apresenta bom desempenho de estimação mesmo para sistemas não-lineares complexos, além de não necessitar de cálculos explícitos de matrizes Jacobianas e de ter custo computacional bastante próximo ao do FKE. Não é necessário, contudo, que as extensões se restrinjam a métodos baseados em filtragem de Kalman, podendo ser usados também algoritmos baseados em simulações de Monte Carlo, como filtros de partículas. Ainda a respeito de alternativas de filtragem, a utilização das medidas do acelerômetro nos passos de predição e de correção de estimativas no sistema de localização exige, teoricamente, que um FK para sistemas correlatos seja utilizado. Como isto não foi feito, foi necessário majorar as matrizes de covariâncias dos termos ϵ de perturbação do FKE

para lidar com esta correlação, implicando perdas de desempenho do sistema de localização. Logo, sugere-se a adaptação da estrutura do FKE para seu equivalente para sistemas correlatos (FKEC).

Com relação a aspectos práticos de implementação do sistema de localização, além dos vieses dos acelerômetros, também seria de grande valia a inclusão no vetor de estados dos fatores de escala e vieses dos girômetros da IMU. Isto porque, caso sensores de baixo custo estejam sendo utilizados, a variação destes parâmetros pode ser expressiva, prejudicando a etapa de predição do quatérnio de atitude do corpo. Por fim, todas as análises numéricas envolvendo dados reais foram feitas *offline*, ou seja, os dados foram coletados durante o experimento e posteriormente processados pelos algoritmos do Capítulo 4 e outros filtros. Dado que se propõe a utilização dos resultados deste trabalho em projetos de robótica com restrições de energia e processamento, seria muito útil verificar quais os requisitos computacionais mínimos para que os filtros híbridos propostos aqui possam ser corretamente calculados. Dessa forma, propõe-se a implementação dos algoritmos do Capítulo 4 em uma linguagem de programação tal como *C*, podendo-se, então, embarcá-los em robôs para realizar a estimação de estados do sistema durante o tempo de operação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] D. Titterton and J. Weston, *Strapdown Inertial Navigation Technology*. London: Peter Peregrinus Ltd., 1997.
- [2] T. Fossen and T. Perez, “Kalman filtering for positioning and heading control of ships and offshore rigs,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 29, no. 6, pp. 32–46, December 2009.
- [3] S. Se, D. Lowe, and J. Little, “Vision-based mobile robot localization and mapping using scale-invariant features,” *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA*, vol. 2, pp. 2051–2058, 2001.
- [4] P. Allen and R. Bajcsy, “Two sensors are better than one: example of vision and touch,” *Proceedings of the 3rd International Symposium on Robotics Research*, pp. 48–55, 1986.
- [5] R. Goebel, R. Sanfelice, and A. Teel, “Hybrid dynamical systems,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 29, no. 2, pp. 28–93, April 2009.
- [6] S. Paoletti, A. Juloski, G. Ferrari-Trecate, and R. Vidal, “Identification of hybrid systems: a tutorial,” *European Journal of Control*, vol. 13, no. 2, pp. 242–260, December 2007.
- [7] A. Doucet, N. Gordon, and V. Krishnamurthy, “Particle filters for state estimation of jump Markov linear systems,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 3, pp. 613–624, March 2001.
- [8] I. Hwang, H. Balakrishnan, and C. Tomlin, “State estimation for hybrid systems: applications to aircraft tracking,” *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, vol. 153, no. 5, pp. 556–566, 2006.
- [9] E. Mazor, A. Averbuch, Y. Bar-Shalom, and J. Dayan, “Interacting multiple model methods in target tracking: a survey,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 34, no. 1, pp. 103–123, January 1998.
- [10] P. Shi, M. Karan, and Y. Kaya, “Robust Kalman filter design for hybrid systems with norm-bounded unknown nonlinearities,” in *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 2, 2000, pp. 1597–1598.
- [11] W. Wang, L. Li, D. Zhou, and K. Liu, “Robust state estimation and fault diagnosis for uncertain hybrid nonlinear systems,” *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 1, no. 1, pp. 2–15, 2007.

- [12] H. Blom and Y. Bar-Shalom, "The Interacting Multiple Model Algorithm for Systems with Markovian Switching Coefficients," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, no. 8, pp. 780–783, August 1988.
- [13] X.-R. Li and Y. Bar-Shalom, "Multiple-model estimation with variable structure," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, no. 4, pp. 478–493, April 1996.
- [14] C. E. Seah and I. Hwang, "State estimation for stochastic linear hybrid systems with continuous-state-dependent transitions: An IMM approach," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 45, no. 1, pp. 376–392, January 2009.
- [15] G. Ackerson and K. Fu, "On state estimation in switching environments," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 15, no. 1, pp. 10–17, February 1970.
- [16] H. Blom, "An efficient filter for abruptly changing systems," *Proceedings of the 23rd Conference on Decision and Control*, vol. 4, no. 30, pp. 656–658, December 1984.
- [17] A. S. Willsky, "A survey of design methods for failure detection in dynamic systems," *Automatica*, vol. 12, no. 6, pp. 601 – 611, 1976.
- [18] J. J. Leonard, H. F. Durrant-White, and I. J. Cox, "Dynamic map building for an autonomous mobile robot," *International Journal of Robotics Research, IJRR*, vol. 11, pp. 286–298, August 1992.
- [19] V. Jilkov and X. Li, "Online Bayesian estimation of transition probabilities for Markovian jump systems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 6, pp. 1620–1630, June 2004.
- [20] Y. Boers and H. Driessen, "A multiple model multiple hypothesis filter for Markovian switching systems," *Automatica*, vol. 41, no. 4, pp. 709 – 716, 2005.
- [21] G. F. Franklin, D. J. Powell, and M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems (3rd Edition)*. Prentice Hall, December 1997.
- [22] D. Magill, "Optimal adaptive estimation of sampled stochastic processes," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 10, no. 4, pp. 434–439, October 1965.
- [23] W. Blair, G. Watson, and T. Rice, "Tracking maneuvering targets with an interacting multiple model filter containing exponentially-correlated acceleration models," in *Proceedings of the 23th Southeastern Symposium on System Theory*, March 1991, pp. 224–228.
- [24] M. Hofbaur and B. Williams, "Hybrid estimation of complex systems," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, vol. 34, no. 5, pp. 2178–2191, October 2004.

- [25] S. Skaff, A. Rizzi, H. Choset, and P.-C. Lin, "A context-based state estimation technique for hybrid systems," in *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA*, April 2005, pp. 3924–3929.
- [26] X. Rong Li, "Multiple-model estimation with variable structure, part II: Model-set adaptation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 11, pp. 2047–2060, November 2000.
- [27] C. E. Seah and I. Hwang, "Stability analysis of the interacting multiple model algorithm," in *American Control Conference*, June 2008, pp. 2415–2420.
- [28] X. Li and Y. Bar-Shalom, "Performance prediction of the interacting multiple model algorithm," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 29, no. 3, pp. 755–771, July 1993.
- [29] T. Kirubarajan and Y. Bar-Shalom, "Kalman filter versus IMM estimator: When do we need the latter?" *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 39, no. 4, pp. 1452–1457, October 2003.
- [30] L. Johnston and V. Krishnamurthy, "An improvement to the interacting multiple model IMM algorithm," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 12, pp. 2909–2923, December 2001.
- [31] Y. Boers and J. Driessen, "Interacting multiple model particle filter," *IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation*, vol. 150, no. 5, pp. 344–349, October 2003.
- [32] J. Wang, D. Zhao, W. Gao, and S. Shan, "Interacting multiple model particle filter to adaptive visual tracking," in *Proceedings of the Third International Conference on Image and Graphics*, 2004.
- [33] H. Blom and E. Bloem, "Exact Bayesian and particle filtering of stochastic hybrid systems," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 43, no. 1, pp. 55–70, January 2007.
- [34] R. Guo, Z. Qin, X. Li, and J. Chen, "Interacting multiple model particle-type filtering approaches to ground target tracking," *Journal of Computers*, vol. 3, no. 7, pp. 23–30, July 2008.
- [35] A. Houles and Y. Bar-Shalom, "Multisensor tracking of a maneuvering target in clutter," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-25, no. 2, pp. 176–189, March 1989.
- [36] X. Li and Y. Bar-Shalom, "Design of an interacting multiple model algorithm for air traffic control tracking," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 1, no. 3, pp. 186–194, September 1993.

- [37] M. Yeddanapudi, Y. Bar-Shalom, and K. Pattipati, "IMM estimation for multitarget-multisensor air traffic surveillance," *Proceedings of the IEEE*, vol. 85, no. 1, pp. 80–94, January 1997.
- [38] W. Schmaedeke and K. Kastella, "Sensor management using discrimination gain and interacting multiple model Kalman filters," Lockheed-Martin Tactical Defense Systems - Eagan, 1998.
- [39] Y. Bar-Shalom, X. Li, and T. Kirubarajan, *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*. Wiley-Interscience, 2001.
- [40] M. Farmer, R.-L. Hsu, and A. Jain, "Interacting multiple model (IMM) Kalman filters for robust high speed human motion tracking," in *Proceedings of the 16th International Conference on Pattern Recognition*, vol. 2, 2002, pp. 20–23.
- [41] J. Burlet, O. Aycard, A. Spalanzani, and C. Laugier, "Pedestrian tracking in car parks : An adaptive interacting multiple models based filtering method," in *Proceedings of the IEEE Intelligent Transportation Systems Conference, ITSC*, September 2006, pp. 462–467.
- [42] J. Gomes, "An overview on target tracking using multiple model methods," Ph.D. dissertation, Universidade Técnica de Lisboa, 2008.
- [43] P. Santana, G. Borges, and J. Ishihara, "Hybrid data fusion for 3D localization under heavy disturbances," in *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS*, 10-15 2010, pp. 55–60.
- [44] C. Ramesh and V. Vaidehi, "IMM based Kalman filter for channel estimation in UWB OFDM systems," in *Proceedings of the International Conference on Signal Processing, Communications and Networking, ICSCN*, February 2007, pp. 320–325.
- [45] A. H. Jazwinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*. New York: Dover Publications, INC, 1970.
- [46] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4th ed. New Delhi: McGraw-Hill Companies, 2002.
- [47] Y. Boers, H. Driessen, and N. Lacle, "Automatic track filter tuning by randomized algorithms," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 38, no. 4, pp. 1444–1449, October 2002.
- [48] Y. Xue and T. Runolfsson, "State estimation and mode detection for stochastic hybrid system," in *Proceedings of the IEEE International Symposium on Intelligent Control, ISIC*, September 2008, pp. 625–630.

- [49] L. Bertuccelli and J. How, “Estimation of non-stationary Markov chain transition models,” in *Proceedings of 47th IEEE Conference on Decision and Control*, December 2008, pp. 55–60.
- [50] K. P. Valavanis, *Advances in Unmanned Aerial Vehicles: State of the Art and the Road to Autonomy*, ser. Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering. Springer, 2007, vol. 33.
- [51] L. Ljung, *System Identification, Theory for the User*, 2nd ed. Prentice Hall, 1999.
- [52] J. Kuipers, *Quaternions and Rotations Sequences: a primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality*. New Jersey: Princeton University Press, 1998.
- [53] M. Psiaki, “Extended QUEST attitude determination filtering,” in *Proceedings of the Flight Mechanics Symposium*, May 1999.
- [54] ———, “Global magnetometer-based spacecraft attitude and rate estimation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 27, no. 2, pp. 240–250, March-April 2004.
- [55] A. P. L. Bó, “Desenvolvimento de um sistema de localização 3D para aplicação em robôs aéreos.” Master’s thesis, Depto. de Eng. Elétrica, Universidade de Brasília (UnB), July 2007.
- [56] Y. Li and J. Yuan, “Attitude determination using GPS vector observations,” in *GNSS World of China*, vol. 3, no. 33, 2005, pp. 51–56.
- [57] E. Lefferts, F. Markley, and M. Shuster, “Kalman filtering for spacecraft attitude estimation,” in *Proceedings of the AIAA 20th Aerospace Sciences Meeting*, January 1982.
- [58] I. Bar-Itzhack and Y. Oshman, “Attitude determination from vector observations: Quaternion estimation,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-21, no. 1, pp. 128–136, January 1985.
- [59] F. Markley, “Attitude or quaternion estimation?” *The Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 52, no. 1-2, pp. 221–238, January-June 2004.
- [60] M. Psiaki, F. Martel, and P. Pal, “Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 13, no. 3, pp. 506–514, May-June 1990.
- [61] F. Markley, “Attitude error representations for Kalman filtering,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 26, no. 2, pp. 311–317, 2003.
- [62] M. S. Grewal and A. P. Andrews, *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*, 3rd ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008.

- [63] A. Bó and G. Borges, “Low cost 3D localization system for applications on aerial robots,” in *Proceedings of the 19th International Congress of Mechanical Engineering*, November 2007.
- [64] R. Van der Merwe and E. Wan, “The square-root unscented Kalman filter for state and parameter-estimation,” in *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP*, vol. 6, 2001, pp. 3461–3464.
- [65] C. Chui and G. Chen, *Kalman filtering with real-time applications*, 3rd ed. Springer-Verlag New York, 1987.
- [66] G. Wahba, “A least squares estimate of satellite attitude,” *SIAM Review*, vol. 7, no. 3, p. 409, 1965.
- [67] W. Gilks, S. Richardson, and D. Spiegelhalter, *Markov chain Monte Carlo in practice*. Chapman & Hall/CRC, 1996.
- [68] M. S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp, “A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 2, pp. 174–188, February 2002.
- [69] S. Julier, J. Uhlmann, and H. Durrant-Whyte, “A new approach for filtering nonlinear systems,” in *Proceedings of the American Control Conference*, vol. 3, June 1995, pp. 1628–1632.
- [70] S. Julier and J. Uhlmann, “A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems,” in *Proceedings of the International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls*, vol. 3068, 1997, pp. 182–193.
- [71] S. Julier, J. Uhlmann, and H. Durrant-Whyte, “A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 3, pp. 477–482, March 2000.
- [72] S. Julier and J. Uhlmann, “Unscented filtering and nonlinear estimation,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 92, no. 3, pp. 401–422, March 2004.
- [73] J. Crassidis and F. Markley, “Unscented filtering for spacecraft attitude estimation,” in *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, August 2003.
- [74] G.-F. Ma and X.-Y. Jiang, “Unscented Kalman filter for spacecraft attitude estimation and calibration using magnetometer measurements,” in *Proceedings of 2005 International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 2005.*, vol. 1, August 2005, pp. 506–511.

- [75] Y.-J. Cheon and J.-H. Kim, “Unscented filtering in a unit quaternion space for spacecraft attitude estimation,” in *IEEE International Symposium on Industrial Electronics, ISIE*, June 2007, pp. 66–71.
- [76] G. Thomas, R. Finney, M. Weir, and F. Giordano, *Cálculo*, 10th ed. Addison Wesley, 2003, vol. 2.
- [77] D. Simon and T. L. Chia, “Kalman filtering with state equality constraints,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 38, no. 1, pp. 128–136, January 2002.
- [78] S. Julier and J. LaViola, “On Kalman filtering with nonlinear equality constraints,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 6, pp. 2774–2784, June 2007.
- [79] B. Teixeira, J. Chandrasekar, L. Torres, L. Aguirre, and D. Bernstein, “State estimation for equality-constrained linear systems,” in *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, December 2007, pp. 6220–6225.
- [80] ———, “Unscented filtering for equality-constrained nonlinear systems,” in *Proceedings of the American Control Conference*, June 2008, pp. 39–44.
- [81] B. O. S. Teixeira, “Estimação de estados com restrições para sistemas dinâmicos lineares e não-lineares.” Ph.D. dissertation, Depto. de Eng. Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), February 2008.
- [82] D. Simon, “Kalman filtering with state constraints: a survey of linear and nonlinear algorithms,” *Control Theory Applications, IET*, vol. 4, no. 8, pp. 1303–1318, August 2010.
- [83] L. Leithold, *O Cálculo com Geometria Analítica*, 3rd ed. Harbra, 1994, vol. 2.
- [84] D. Simon, *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches*. Wiley-Interscience, 2006.
- [85] R. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems,” *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, no. 82, pp. 35–45, March 1960.
- [86] I. Bar-Itzhack and J. D. F. Markley, “Quaternion normalization in additive EKF for spacecraft attitude determination,” in *Proceedings of the Flight Mechanics/Estimation Theory Symposium*, October 1991, pp. 403–421.
- [87] H. Michalska and D. Mayne, “Moving horizon observers and observer-based control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, no. 6, pp. 995–1006, June 1995.
- [88] P. Santana, H. Menegaz, G. Borges, and J. Ishihara, “Multiple hypotheses mixing filter for hybrid Markovian switching systems,” in *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, December 2010.

- [89] I. Hwang and C. E. Seah, “An estimation algorithm for stochastic linear hybrid systems with continuous-state-dependent mode transitions,” *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 131–136, December 2006.
- [90] E. Benazera and L. Travé-Massuyès, “Set-theoretic estimation of hybrid system configurations,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, vol. 39, no. 5, pp. 1277–1291, October 2009.
- [91] F. Orderud, “Comparison of Kalman filter estimation approaches for state space models with nonlinear measurements,” in *Proceedings of 46th Conference on Simulation and Modeling, SIMS*, 2005.
- [92] S. Haykin, Ed., *Kalman filtering and neural networks*. Wiley-Interscience, 2001.

APÊNDICES

A. TÓPICOS EM FILTRAGEM ESTOCÁSTICA

A.1 INTRODUÇÃO

Estimação de estados é um assunto de tal importância que Simon batiza o Apêndice C de [84] de “Estimação de Estados e o Sentido da Vida” (*State Estimation and the Meaning of Life*). De acordo com [45], o problema de estimação de estados de sistemas dinâmicos estocásticos a partir de medidas ruidosas é um assunto de importância central no campo da engenharia. Registros de trabalhos nesta área datam de mais de dois séculos, quando Gauss propôs o método de estimação de mínimos quadrados (*least square estimation*) ao tentar estabelecer os parâmetros de órbitas por meio de observações de corpos celestes. Sistemas físicos (máquinas industriais, redes de transmissão de energia, aeronaves, robôs, aparelhos domésticos, etc.) são projetados e construídos para executar tarefas específicas e atender a objetivos. Para poder avaliar o desempenho de um sistema e, se necessário, tomar medidas corretivas, um controlador (humano ou não) precisa saber o que o sistema está “fazendo” a todo instante de tempo, ou seja, precisa saber o seu estado. Contudo, sistemas reais sofrem com perturbações do ambiente, podendo eles mesmos apresentarem comportamentos aleatórios. Visando à determinação do estado de um sistema, pode-se valer das leituras de instrumentos que medem grandezas relacionadas a ele, mas também estas medidas são corrompidas por ruído. Tendo isto em vista, o problema de estimação de estados a partir de modelos e medidas incertos (ruidosos) é chamado de estimação ou filtragem [45], sendo este o assunto deste apêndice.

Não se pretende que este texto sirva como uma referência completa no assunto de estimação e filtragem estocásticas, recomendando-se a leitura de [45, 72, 84, 92], além de várias outras referências disponíveis, para análises mais aprofundadas das discussões feitas aqui. Procura-se oferecer neste complemento uma condensação dos tópicos mais importantes para a melhor compreensão do trabalho, auxiliando o leitor sem prévio conhecimento avançado no assunto. Para tanto, começa-se apresentando o problema de estimação de estados para sistemas discretos e suas diferentes possíveis formulações. Em seguida, o filtro ótimo para sistemas lineares, o Filtro de Kalman (FK), é descrito, seguido de sua generalização baseada em linearização de modelo de sistemas não-lineares, o Filtro de Kalman Estendido (FKE). Por fim, apresenta-se a Transformada Unscented (UT), um método moderno para propagação de parâmetros estatísticos por meio de transformações não-lineares complexas, e a sua incorporação ao algoritmo do FK para gerar o Filtro de Kalman Unscented (FKU), um dos algoritmos mais eficientes para filtragem de sistemas não-lineares disponíveis atualmente.

A.2 O PROBLEMA DE ESTIMAÇÃO DE ESTADOS PARA SISTEMAS DISCRETOS

Procurando introduzir o assunto, uma interpretação gráfica do problema de filtragem estocástica é dada na Figura A.1. Idealmente, o objetivo do filtro estocástico é fornecer, a todo instante k , o valor real do estado x_k do sistema, em que x_k pode também envolver parâmetros desconhecidos do modelo matemático do sistema dinâmico. Para que isso fosse, de fato, possível, o filtro estocástico necessitaria ter acesso às entradas reais $u_{re,k}$ aplicadas ao sistema, juntamente com o modelo matemático real

$$x_k = f_{re}(x_{k-1}, u_{re,k-1}), \quad (\text{A.1})$$

$$y_k = h_{re}(x_k), \quad (\text{A.2})$$

e medidas y_k dos sensores absolutamente livres de distúrbios, em que (A.1) descreve a maneira como o estado x_k evolui de acordo com grandezas do instante anterior¹ e (A.2) é a função que relaciona as medidas dos sensores ao estado x_k atual do sistema. Contudo, esta situação jamais é verdadeira para sistemas dinâmicos reais. Sempre há imprecisões na definição da função de medição h_{re} e as saídas y_k dos sensores sempre são perturbadas por elementos de ruído, estando todos estes efeitos concentrados no termo de distúrbio v_k . Da mesma forma, as entradas u_k medidas são versões corrompidas por ruído $w_{u,k}$ das entradas reais $u_{re,k}$. Por fim, o termo w_k modela os desvios referentes à função f_{re} de evolução do processo, que nunca é totalmente conhecida. Como não se pode ter acesso a (A.1)-(A.2), o modelo matemático do sistema usado pelo filtro deve levar em conta as incertezas e ruídos explicitamente, dando origem a

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1}, \quad (\text{A.3})$$

$$y_k = h(x_k) + v_k, \quad (\text{A.4})$$

em que w_{k-1} e v_k são processos de ruído branco Gaussiano i.i.d. tais que $w_{k-1} \sim N(0, Q_{k-1})$ e $v_k \sim N(0, R_k)$; e $u_{k-1} \sim N(\bar{u}_{k-1}, P_{u,k-1})$ é o vetor de entrada do sistema, ao qual também está associada uma perturbação Gaussiana $w_{u,k-1} \sim N(0, P_{u,k-1})$. Caso o sistema (A.1)-(A.2) seja linear, considera-se a forma

$$x_k = A_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1}, \quad (\text{A.5})$$

$$y_k = C_k x_k + v_k. \quad (\text{A.6})$$

Uma prática comum no modelamento de sistemas dinâmicos reais é concentrar toda a incerteza relacionada a (A.3) ou (A.5) no termo de ruído w_{k-1} . Nestas situações, faz-se

¹Por se tratar de um sistema dinâmico discreto, não é possível escolher uma função f_{re} de evolução de estado tal que o estado atual x_k dependa da entrada atual $u_{re,k}$ aplicada sobre o sistema [21]. De fato, demonstra-se que o sistema discreto de resposta dinâmica mais rápida possível é o atraso unitário, ou seja, o sistema tal que $x_k = u_{re,k-1}$ e que demora um período de amostragem completo para incorporar a informação da entrada do passo anterior.

$P_{u,k-1} = 0$, ou seja, elimina-se toda a incerteza associada ao vetor de entradas u_{k-1} , que passa a ser considerado completamente conhecido. Esta formulação é particularmente útil quando é difícil caracterizar as perturbações sobre u_k ou nas situações em que não se tem acesso a este vetor, passando-se a depender exclusivamente das medidas y_k e dos modelos matemáticos para estimação de estados. Nestas situações, as medidas $u_{1:k}$ podem ser eliminadas da análise que será apresentada no restante desta seção.

Em posse de (A.3)-(A.4) ou (A.5)-(A.6) e de medidas de entrada $u_{1:L} = \{u_1, u_2, \dots, u_L\}$ e saída $y_{1:L} = \{y_1, y_2, \dots, y_L\}$ corrompidas por ruído, o problema de estimação discreta de estado consiste em procurar pela estimativa \hat{x}_k que melhor aproxima x_k em algum sentido, visto que nunca é possível chegar a x_k diretamente. Se $k < L$, i.e., existem medidas de entrada e saída posteriores ao instante de filtragem k , o problema é chamado de suavização discreta (*discrete smoothing*). Agora, se $k > L$, está-se tentando estabelecer uma estimativa de estado \hat{x}_k para um instante de tempo para o qual ainda não há medidas, sendo este o problema de predição discreta (*discrete prediction*). O último caso, $k = L$, é o problema de filtragem discreta (*discrete filtering*) e será doravante assumido.

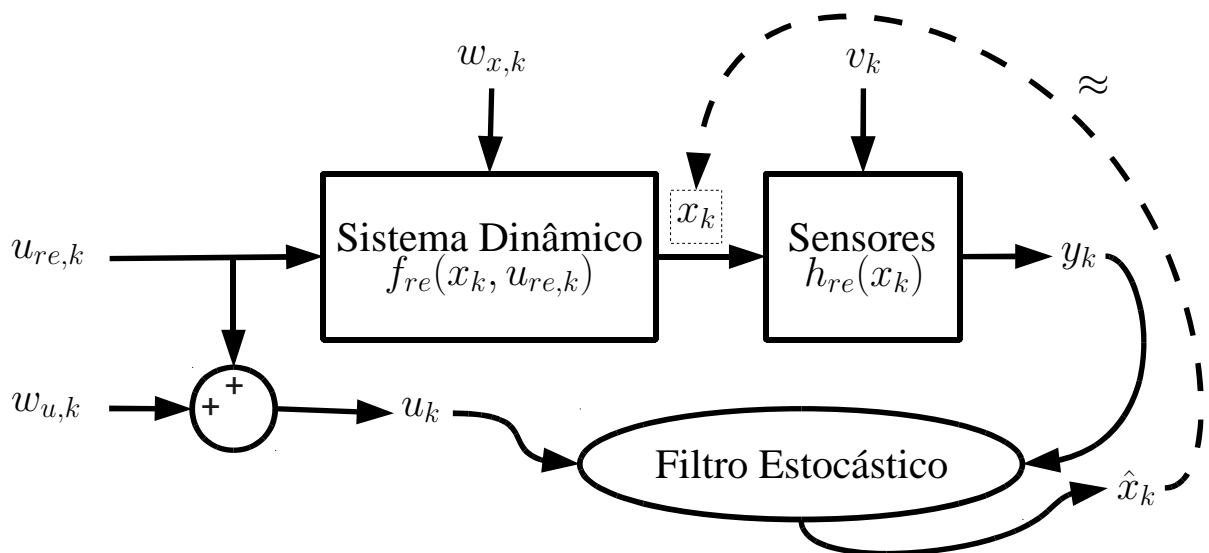


Figura A.1: Diagrama dos componentes envolvidos na obtenção da estimativa \hat{x}_k que aproxima o estado real x_k desconhecido, em que o filtro estocástico utiliza informações de entrada u_k e saída y_k perturbadas por ruído.

Ao dizer que as estimativas $\hat{x}_{1:k} = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k\}$ aproximam a seqüência de estados real $x_{1:k} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ “em algum sentido”, deve-se entender que $\hat{x}_{1:k}$ é um ponto crítico (máximo ou mínimo) que otimiza uma função de custo $\rho(x_{1:k}|y_{1:k}, u_{1:k})$ de $x_{1:k}$ condicionada às medidas $u_{1:k}$ e $y_{1:k}$. A forma dessa função de custo, no entanto, pode ser escolhida de acordo com as propriedades desejadas para a seqüência de estimativas obtida por meio da otimização de $\rho(x_{1:k}|y_{1:k}, u_{1:k})$. Para que essas estimativas representem, de fato, boas aproximações do sistema e tenham utilidade prática, a literatura a respeito de filtragem estocástica considera duas formulações diferentes para a função ρ . A primeira delas fornece

estimativas $\hat{x}_{1:k}^v$ de mínima variância, que são a solução do problema de otimização

$$\hat{x}_{1:k}^v = \arg \min_{\hat{x}_{1:k}} \left(E \left\{ \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x}_i)^T (x_i - \hat{x}_i) \middle| y_{1:k}, u_{1:k} \right\} \right), \quad (\text{A.7})$$

em que (A.7) é uma medida dos desvios entre as estimativas \hat{x}_i e os valores reais x_i do estado do sistema, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. O Teorema 1 a seguir, que é uma generalização para o caso discreto do Teorema 5.3 em [45], fornece uma maneira de se calcular $\hat{x}_{1:k}^v$.

Teorema 1 (Estimativa de mínima variância) *Seja $\hat{x}_{1:k}^v$ a estimativa de mínima variância definida como a solução ótima do problema em (A.7). Seja também $p(x_1, x_2, \dots, x_k | y_{1:k}, u_{1:k})$ a f.d.p. conjunta das variáveis de estado $x_{1:k}$. Qualquer que seja a forma de $p(x_{1:k} | y_{1:k}, u_{1:k})$, a solução $\hat{x}_{1:k}^v$ de mínima variância é dada por $\hat{x}_{1:k}^v = E\{X_k | y_{1:k}, u_{1:k}\} = \mu_k$, em que $\mu_k = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k]^T$ é a média condicional tal que*

$$\mu_i = \int \cdots \int \int_{-\infty}^{\infty} x_i p(x_{1:k} | y_{1:k}, u_{1:k}) dx_1 \dots dx_k, i \in \{1, \dots, k\}.$$

Prova *Sejam $X_k = [x_1, x_2, \dots, x_k]^T$ e $\hat{X}_k = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k]^T$ variáveis auxiliares tais que o somatório em (A.7) possa ser escrito como*

$$\sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x}_i)^T (x_i - \hat{x}_i) = (X_k - \hat{X}_k)^T (X_k - \hat{X}_k). \quad (\text{A.8})$$

Suprimindo, apenas por motivos de conveniência de notação, a dependência do operador $E\{\cdot\}$ em relação às medidas $y_{1:k}$ e $u_{1:k}$, tem-se

$$E \left\{ (X_k - \hat{X}_k)^T (X_k - \hat{X}_k) \right\} = E \left\{ (X_k - c + c - \hat{X}_k)^T (X_k - c + c - \hat{X}_k) \right\}, \quad (\text{A.9})$$

em que c é um termo constante qualquer. Desenvolvendo (A.9), tem-se

$$\begin{aligned} E \left\{ (X_k - c + c - \hat{X}_k)^T (X_k - c + c - \hat{X}_k) \right\} &= E \left\{ (X_k - c)^T (X_k - c) \right\} + E \left\{ (X_k - c)^T (c - \hat{X}_k) \right\} \\ &\quad + E \left\{ (c - \hat{X}_k)^T (X_k - c) \right\} + E \left\{ (c - \hat{X}_k)^T (c - \hat{X}_k) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

É fácil ver que os três últimos termos de (A.10) são minimizados ao se escolher $\hat{X}_k = c$, uma vez que

$$\begin{aligned} E \left\{ (X_k - c + c - \hat{X}_k)^T (X_k - c + c - \hat{X}_k) \right\} &= E \left\{ (X_k - c)^T (X_k - c) \right\} + E \left\{ (X_k - c)^T (c - c) \right\} \\ &\quad + E \left\{ (c - c)^T (X_k - c) \right\} + E \left\{ (c - c)^T (c - c) \right\} \\ &= E \left\{ (X_k - c)^T (X_k - c) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Logo, basta agora que se minimize o desvio quadrático $E \{(X_k - c)^T (X_k - c)\}$ em (A.11) de X_k desconhecido² em torno da constante c . Desenvolvendo (A.11), tem-se

$$E \{(X_k - c)^T (X_k - c)\} = E \{X_k^T X_k\} - E \{X_k^T c\} - E \{c^T X_k\} + E \{c^T c\}. \quad (\text{A.12})$$

O valor mínimo de (A.12) é encontrado em seu ponto crítico c^* com relação à constante c . Derivando (A.12) em relação a c , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial E \{(X_k - c)^T (X_k - c)\}}{\partial c} &= \frac{\partial E \{X_k^T X_k\}}{\partial c} - \frac{\partial E \{X_k^T c\}}{\partial c} - \frac{\partial E \{c^T X_k\}}{\partial c} + \frac{\partial E \{c^T c\}}{\partial c} \\ &= 0 - E \{X_k^T\} - E \{X_k^T\} + 2c^T, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

em que foi usado o fato de que $E\{\cdot\}$ e $\partial/\partial c$ comutam. O ponto crítico de (A.12) corresponde à raiz de (A.13). Logo,

$$2(c^*)^T - 2E \{X_k^T\} = 0 \rightarrow c^* = E \{X_k\}. \quad (\text{A.14})$$

Fazendo $\hat{X}_k = c^* = E \{X_k\}$, tem-se a solução que minimiza (A.8). ■

Outra maneira possível de se formular o problema de filtragem é escolher $\rho(x_{1:k}|y_{1:k}, u_{1:k})$ de tal forma que

$$\hat{x}_{1:k}^l = \arg \max_{\hat{x}_{1:k}} (p(\hat{x}_{1:k}|y_{1:k}, u_{1:k})), \quad (\text{A.15})$$

em que $\hat{x}_{1:k}^l$ são as estimativas de máxima probabilidade *a posteriori* e $p(\hat{x}_{1:k}|y_{1:k}, u_{1:k})$ é a densidade de probabilidades conjunta da seqüência de estimativas $\hat{x}_{1:k}$ condicionada às medidas $y_{1:k}$ e $u_{1:k}$. Diferentemente de (A.7), que procura minimizar desvios em relação aos valores reais de $x_{1:k}$, as estimativas $\hat{x}_{1:k}^l$ obtidas em (A.15) são aquelas que correspondem à região de maior concentração de probabilidades em $p(\hat{x}_{1:k}|y_{1:k}, u_{1:k})$, ou seja, são aquelas com “maior probabilidade” de serem verdadeiras. Em razão disso, Jazwinski denomina (A.15) em [45] de estimativa Bayesiana de máxima verossimilhança e mostra que, para sistemas lineares (A.5)-(A.6), o problema de otimização em (A.15) é equivalente ao problema de mínimos quadrados

$$\hat{x}_{1:k}^l = \arg \min_{\hat{x}_{1:k}} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (y_i - C_i \hat{x}_i)^T (R_i)^{-1} (y_i - C_i \hat{x}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k w_i^T (Q_i)^{-1} w_i \right), \quad (\text{A.16})$$

em que os desvios são medidos entre as medidas y_i e seus valores preditos por (A.6) e as estimativas de estado $\hat{x}_{1:k}$ estão sujeitas à restrição de evolução imposta por (A.5). Note que apenas o primeiro somatório em (A.16) é dependente das estimativas.

²Caso X_k fosse conhecido, bastaria escolher $\hat{X}_k = X_k$ para obter a solução ótima do problema de filtragem.

A análise anterior deixa claro que, no momento em que as próximas medidas u_{k+1} e y_{k+1} são lidas, a solução dos problemas de otimização em (A.7), (A.15) e (A.16) necessita que todos os conjuntos de medidas $u_{1:k+1}$ e $y_{1:k+1}$ sejam reavaliados, juntamente com os valores de todas as estimativas de estado $\hat{x}_{1:k+1}$. Sendo assim, estes problemas são tratáveis apenas na situação em que a estimação de estados não está sendo feita em tempo real, ou seja, todas as medidas de entrada e saída são conhecidas e, de posse delas, se quer determinar a seqüência ótima de estimativas de estado de acordo com os critérios de mínima variância (A.7) ou máxima probabilidade *a posteriori* (A.15). A exceção a esta regra são os sistemas lineares, para os quais existe o Filtro de Kalman (Seção A.3). Para este tipo particular de sistema, o FK é o estimador ótimo recursivo de (A.16) que determina a estimativa no instante $k + 1$ a partir da solução para o instante k , apresentando, portanto, tempo de computação independente do número da iteração. Para sistemas não-lineares, no entanto, existem apenas soluções recursivas aproximadas e, à medida em que o tempo cresce, a complexidade computacional da solução de (A.7) ou (A.15) torna a estimação conjunta de $\hat{x}_{1:k}$ infactível [45].

Em razão das dificuldades para obtenção da estimativa conjunta $\hat{x}_{1:k}$, a estimação de estados em tempo real para sistemas dinâmicos discretos volta a sua atenção a problemas marginais de otimização [84]. Nestas situações, não se está mais interessado em determinar-se a seqüência completa $\hat{x}_{1:k}$ de estimativas, mas sim apenas a estimativa \hat{x}_k para o instante atual que otimiza uma dada função de custo, razão do termo marginal. De maneira análoga a (A.7) e (A.15), definem-se os problemas de otimização marginais

$$\hat{x}_k^v = E \{x_k | y_{1:k}, u_{1:k}\}, \quad (\text{A.17})$$

$$\hat{x}_k^l = \arg \max_{\hat{x}_k} (p(\hat{x}_k | y_{1:k}, u_{1:k})), \quad (\text{A.18})$$

em que \hat{x}_k^v e \hat{x}_k^l são, respectivamente, as estimativas marginais de mínima variância³ e máxima probabilidade *a posteriori*. Todos os filtros estocásticos abordados neste trabalho, sejam eles para sistemas híbridos ou não, dedicam-se à resolução dos problemas de otimização marginais (A.17)-(A.18), cujas soluções geralmente diferem dos resultados de (A.7) e (A.15). Mais uma vez, a exceção a esta regra são os sistemas lineares (A.5)-(A.6). Para este tipo de sistema, [45] afirma que os problemas de otimização conjunta (A.7) e (A.15) e marginal (A.17)-(A.18) coincidem. Mais ainda, as estimativas \hat{x}_k^v de mínima variância e \hat{x}_k^l de máximo *a posteriori* são as mesmas e podem ser determinadas de maneira ótima pelo algoritmo do FK. Para sistemas não-lineares, em geral, (A.17)-(A.18) podem ser resolvidos apenas de maneira aproximada, não existindo um estimador ótimo disponível.

De acordo com o Teorema 1, o problema de mínima variância em (A.17) sempre tem sua solução dada pela média condicional, não importando a forma de $p(x_k | y_{1:k}, u_{1:k})$, ao passo que (A.18) depende, de fato, da densidade de probabilidade. De um ponto de vista

³A troca do problema de otimização pelo cálculo da média condicionada em (A.17) é consequência do Teorema 1.

Bayesiano, tem-se a igualdade

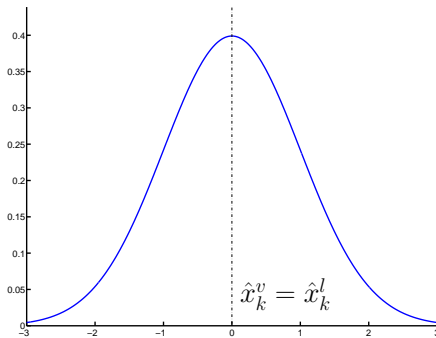
$$p(x_k|y_{1:k}, u_{1:k}) = \frac{\overbrace{p(y_k|x_k, y_{1:k-1}, u_{1:k})}^{\text{Verossimilhança de } y_k} \overbrace{p(x_k|y_{1:k-1}, u_{1:k})}^{\text{Distribuição a priori de } x_k}}{\underbrace{p(y_k|y_{1:k-1}, u_{1:k})}_{\text{Termo independente de } x_k}}. \quad (\text{A.19})$$

Uma vez que o denominador de (A.19) é independente de x_k , pode-se relevá-lo no problema de maximização (A.18). Portanto, a dependência de \hat{x}_k^l fica restrita aos dois termos do numerador. O primeiro deles, $p(y_k|x_k, y_{1:k-1}, u_{1:k})$, é a verossimilhança da medida atual y_k e pode ser obtida a partir de (A.4) ou (A.6). Por motivos de simplicidade, assumiu-se que v_k é um termo aditivo em ambas as equações, o que facilita a obtenção da verossimilhança. Uma vez que x_k é considerado um dado conhecido em $p(y_k|x_k, y_{1:k-1}, u_{1:k})$, tanto $h(x_k)$ quanto $C_k x_k$ tornam-se constantes, i.e., não apresentam incerteza alguma. Dessa forma, a verossimilhança de y_k é função da distribuição de v_k . Dada a hipótese $v_k \sim N(0, R_k)$ assumida anteriormente, chega-se à conclusão de que $y_k \sim N(\bar{y}_k, R_k)$, em que $\bar{y}_k = h(x_k)$ ou $\bar{y}_k = C_k x_k$, dependendo de qual modelo dentre (A.4) ou (A.6) está sendo considerado. A complexidade de (A.18) reside, de fato, no termo $p(x_k|y_{1:k-1}, u_{1:k})$, que representa a distribuição de probabilidades *a priori*⁴ de x_k . Para sistemas não-lineares genéricos, mesmo que se parta de uma estimativa inicial \hat{x}_0 com distribuição Gaussiana, as transformações em (A.3) dificultam a obtenção de uma expressão analítica para $p(x_k|y_{1:k-1}, u_{1:k})$, tornando complexo, ou até mesmo impossível, a determinação da estimativa ótima \hat{x}_k^l para (A.18). Não causa espanto, todavia, que sistemas lineares (A.5)-(A.6) sejam uma exceção. A Seção A.3 mostra que, para este tipo de sistema, tanto $p(y_k|x_k, y_{1:k-1}, u_{1:k})$ quanto $p(x_k|y_{1:k-1}, u_{1:k})$ são Gaussianas a todo passo k do filtro, tornando a distribuição *a posteriori* $p(x_k|y_{1:k}, u_{1:k})$ também Gaussiana. Nesta situação, o problema de maximização em (A.18) recai em um problema de mínimos quadrados semelhante a (A.16), cuja solução ótima é obtida por meio do FK.

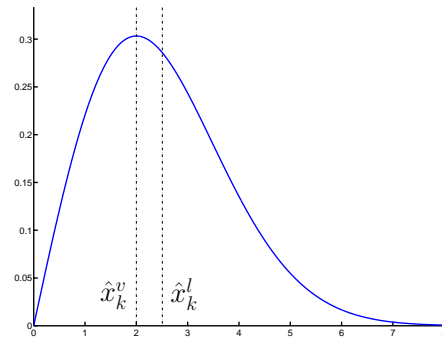
Procurando deixar clara a diferença entre estimativas \hat{x}_k^v de mínima variância e \hat{x}_k^l de máximo *a posteriori*, termina-se esta seção com a análise dos gráficos da Figura A.2. Note que, dentre todos eles, apenas na Figura A.2(a) houve a equivalência $\hat{x}_k^v = \hat{x}_k^l = 0$, ou seja, os problemas de otimização (A.17) e (A.18) têm a mesma solução. Para sistemas lineares (A.5)-(A.6) com ruídos e estimativas iniciais Gaussianas, mostra-se na Seção A.3 que a f.d.p. *a posteriori* de x_k em (A.19) também é Gaussiana e, portanto, tem o mesmo formato da Figura A.2(a). Contudo, assim como observado em [45], estas estimativas estarão próximas apenas para densidades unimodais (apenas um ponto de máximo) e concentradas próximas ao modo, que é exatamente a situação da distribuição Rayleigh da Figura A.2(b). Ainda que não coincidam, a média $\hat{x}_k^v = \sqrt{2\pi} \approx 2,51$ da distribuição encontra-se muito próxima da região de maior concentração de probabilidades, cujo máximo acontece em $\hat{x}_k^l = 2$. Situação muito

⁴Diferentemente da distribuição *a posteriori* de x_k , $p(x_k|y_{1:k}, u_{1:k})$, que utiliza a informação de saída atual y_k do sistema, a distribuição *a priori* de x_k , $p(x_k|y_{1:k-1}, u_{1:k})$, utiliza informações de saída apenas até o instante $k-1$. A distribuição *a priori* é determinada a partir dos modelos de evolução (A.3) ou (A.5), enquanto que os modelos de saída (A.4) ou (A.6) servem ao propósito de cálculo da verossimilhança de y_k .

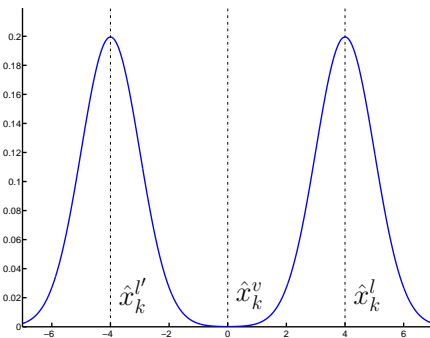
diversa é encontrada nas duas figuras restantes. A soma de Gaussianas na Figura A.2(c) é, de fato, totalmente simétrica em relação à média $\hat{x}_k^v = 0$, mas a presença de dois máximos globais (distribuição bimodal) cria duas estimativas de máximo *a posteriori* $\hat{x}_k^l = -4$ e $\hat{x}_k^l = 4$ que tornam (A.18) indeterminado. A soma de Gaussianas na Figura A.2(d), por outro lado, tem apenas um máximo global em $\hat{x}_k^l = 2$, mas o acúmulo de probabilidades em uma região distante deste pico move a estimativa de mínima variância para $\hat{x}_k^v = 0,2$, um valor sensivelmente diferente. Além disso, o máximo local em $\hat{x}_k^l = -4$ pode ser erroneamente considerado como a estimativa de máximo *a posteriori*, caso condições iniciais inadequadas sejam escolhidas para métodos de otimização não-lineares que aproximem a solução de (A.18).



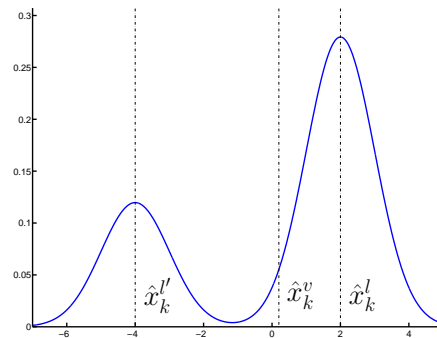
(a) Gaussiana (simétrica, monomodal).



(b) Rayleigh (assimétrica, monomodal).



(c) Soma de Gaussianas (simétrica, bimodal).



(d) Soma de Gaussianas (assimétrica, bimodal).

Figura A.2: Funções densidade de probabilidade para diferentes distribuições e assinalamento das estimativas \hat{x}_k^v de mínima variância (média) e \hat{x}_k^l de máxima verossimilhança Bayesiana.

A.3 FILTRO DE KALMAN (FK)

Primeiramente proposto por Rudolf E. Kalman em seu trabalho seminal [85], o FK é o estimador linear ótimo para sistemas lineares

$$x_k = A_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1}, \quad (\text{A.5})$$

$$y_k = C_k x_k + v_k, \quad (\text{A.6})$$

em que $w_{k-1} \sim N(0, Q_{k-1})$ e $v_k \sim N(0, R_k)$ são processos de ruído branco Gaussianos e decorrelacionados, ou seja,

$$E\{w_i w_j\} = \begin{cases} Q_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, E\{v_i v_j\} = \begin{cases} R_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, E\{w_i v_j\} = 0, \forall i, j \in \mathbb{N},$$

e $u_{k-1} \sim N(\bar{u}_{k-1}, P_{u,k-1})$ é o vetor de entrada do sistema ao qual também está associada uma incerteza. Caso esta incerteza seja nula, basta fazer $P_{u,k-1} = 0$. De acordo com [84], mesmo que w_{k-1} e v_k não sejam Gaussianos, o FK ainda é o melhor filtro linear para (A.5)-(A.6), ainda que possa existir um estimador não-linear com melhor desempenho.

Seguindo o procedimento adotado no artigo original de Kalman [85], Jazwinski demonstra no Capítulo 7 de [45] que o FK é o estimador linear ótimo de (A.5)-(A.6) por meio do método de projeções ortogonais. Simon, por outro lado, chega ao mesmo resultado no Capítulo 5 de [84], onde determina o estimador linear que minimiza o traço da matriz de covariâncias do erro de estimação. Nesta última demonstração, no entanto, o autor considera a forma do FK conhecida, atendo-se apenas à determinação do ganho de Kalman ótimo. A exposição mais detalhada a respeito do FK feita na Seção A.3.1 se justifica, principalmente, pelo fato do Filtro de Kalman Estendido, algoritmo apresentado na Seção A.4 e usado para geração de todos os resultados numéricos desta dissertação, ser uma extensão linear de primeira ordem do FK para sistemas não-lineares. O Filtro de Kalman *Unscented* (FKU) da Seção A.5.2 é outra extensão do FK, porém que utiliza a Transformada *Unscented* (UT) da Seção A.5.1 para propagar médias e covariâncias de distribuições de probabilidade através de funções não-lineares. Em virtude de sua importância histórica e prática, aspectos envolvidos na dedução do FK são apresentados a seguir visando à facilitação do entendimento de estimadores de estados modernos baseados em filtragem de Kalman.

A.3.1 Derivação do FK (critério de máximo *a posteriori*)

Para realizar as manipulações necessárias à determinação das equações do FK em suas formas usuais, o Lema 1 a seguir apresenta uma série de identidades matriciais úteis às operações algébricas desta seção.

Lema 1 (Lema de inversão de matrizes) *Considere A, B, C, D matrizes quaisquer tais que A e D são quadradas e invertíveis. Além disso, suponha que $(D - CA^{-1}B)$ e $(A - BD^{-1}C)$*

também sejam invertíveis. Logo, são válidas as igualdades

$$(A - \mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C})^{-1} = A^{-1} + A^{-1}\mathcal{B}(\mathcal{D} - \mathcal{C}A^{-1}\mathcal{B})^{-1}\mathcal{C}A^{-1}, \quad (\text{A.20})$$

$$(A - \mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C})^{-1}\mathcal{B}\mathcal{D}^{-1} = A^{-1}\mathcal{B}(\mathcal{D} - \mathcal{C}A^{-1}\mathcal{B})^{-1}, \quad (\text{A.21})$$

$$\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}(A - \mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C})^{-1} = (\mathcal{D} - \mathcal{C}A^{-1}\mathcal{B})^{-1}\mathcal{C}A^{-1}, \quad (\text{A.22})$$

$$\mathcal{D}^{-1} + \mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}(A - \mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C})^{-1}\mathcal{B}\mathcal{D}^{-1} = (\mathcal{D} - \mathcal{C}A^{-1}\mathcal{B})^{-1}. \quad (\text{A.23})$$

Prova Supondo A e $(\mathcal{D} - \mathcal{C}A^{-1}\mathcal{B})$ invertíveis, a solução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} A & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

é dada por

$$\begin{bmatrix} A & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}\mathcal{B}(\mathcal{D} - \mathcal{C}A^{-1}\mathcal{B})^{-1}\mathcal{C}A^{-1} & -A^{-1}\mathcal{B}(\mathcal{D} - \mathcal{C}A^{-1}\mathcal{B})^{-1} \\ -(\mathcal{D} - \mathcal{C}A^{-1}\mathcal{B})^{-1}\mathcal{C}A^{-1} & (\mathcal{D} - \mathcal{C}A^{-1}\mathcal{B})^{-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

Agora, supondo \mathcal{D} e $(A - \mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C})$ invertíveis e seguindo o mesmo procedimento anterior, chega-se à solução

$$\begin{bmatrix} A & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - \mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C})^{-1} & -(A - \mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C})^{-1}\mathcal{B}\mathcal{D}^{-1} \\ -\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}(A - \mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C})^{-1} & \mathcal{D}^{-1} + \mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}(A - \mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C})^{-1}\mathcal{B}\mathcal{D}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

A comparação de (A.24) e (A.25) conclui a prova. ■

O objetivo aqui é encontrar a estimativa \hat{x}_k e sua matriz de covariâncias associada \hat{P}_k tal que a densidade de probabilidade *a posteriori*

$$p(x_k | y_{1:k}, u_{1:k}) = \frac{p(y_k | x_k, y_{1:k-1}, u_{1:k})p(x_k | y_{1:k-1}, u_{1:k})}{p(y_k | y_{1:k-1}, u_{1:k})} \quad (\text{A.19})$$

seja maximizada, ou seja, \hat{x}_k é a solução de (A.18). Para tanto, suponha que estejam disponíveis as estimativas

$$\hat{x}_{k-1} = \arg \max_{x_k} (p(x_{k-1} | y_{1:k-1}, u_{1:k-1})),$$

$$\hat{P}_{k-1} = E\{(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1})(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1})^T\},$$

do passo anterior do filtro. Além disso, suponha que a f.d.p. $p(x_{k-1} | y_{1:k-1}, u_{1:k})$ do passo anterior seja Gaussiana. A primeira etapa na maximização de (A.19) consiste na obtenção de $p(x_k | y_{1:k-1}, u_{1:k})$, a f.d.p. *a priori* do vetor de estados x_k . Para tanto, note que o modelo de evolução (A.5) é capaz de prever o valor atual de x_k apenas a partir de grandezas do passo anterior $k-1$. Uma vez que x_{k-1} e w_{k-1} são variáveis aleatórias Gaussianas, é fato

conhecido que a sua combinação linear em (A.5) também é Gaussiana [46], cuja média \bar{x}_k e matriz de covariâncias \bar{P}_k são dadas por

$$\bar{x}_k = A_{k-1}\hat{x}_{k-1} + B_{k-1}\bar{u}_{k-1}, \quad (\text{A.26})$$

$$\bar{P}_k = A_{k-1}\hat{P}_{k-1}A_{k-1}^T + B_{k-1}P_{u,k-1}B_{k-1}^T + Q_{k-1}. \quad (\text{A.27})$$

As equações (A.26)-(A.27) correspondem ao passo de predição do FK e dão origem à f.d.p. *a priori*

$$p(x_k|y_{1:k-1}, u_{1:k}) = c_{ap} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x_k - \bar{x}_k)^T \bar{P}_k^{-1}(x_k - \bar{x}_k) \right\}, \quad (\text{A.28})$$

em que c_{ap} é uma constante que não influi na otimização de (A.19). O próximo passo é determinar uma expressão para a verossimilhança $p(y_k|x_k, y_{1:k-1}, u_{1:k})$ da medida atual y_k considerando x_k dado, assunto já previamente abordado no final da Seção A.2. Naquela ocasião, observou-se que a ausência de incerteza associada a x_k , visto que este é considerado dado, e a presença de um termo de ruído aditivo $v_k \sim N(0, R_k)$ em (A.6) fazem com que $y_k \sim N(C_k x_k, R_k)$. Logo,

$$p(y_k|x_k, y_{1:k-1}, u_{1:k}) = c_{vs} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(y_k - C_k x_k)^T \bar{R}_k^{-1}(y_k - C_k x_k) \right\}, \quad (\text{A.29})$$

em que c_{vs} é novamente um termo constante. Observando, mais uma vez, que $p(y_k|y_{1:k-1}, u_{1:k})$ é independente de x_k , (A.19) pode ser reescrita como

$$p(x_k|y_{1:k}, u_{1:k}) = c_{po} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(y_k - C_k x_k)^T R_k^{-1}(y_k - C_k x_k) + (x_k - \bar{x}_k)^T \bar{P}_k^{-1}(x_k - \bar{x}_k)] \right\}. \quad (\text{A.30})$$

Deve-se observar que os modelos Gaussianos para a f.d.p. *a priori* (A.28) e para a verossimilhança (A.29) fazem com que (A.30) seja, também, Gaussiana [45, 84].

É fácil ver que a maximização de (A.30) é equivalente à determinação do valor \hat{x}_k que maximiza

$$f_{exp}(x_k) = -\frac{1}{2} [(y_k - C_k x_k)^T R_k^{-1}(y_k - C_k x_k) + (x_k - \bar{x}_k)^T \bar{P}_k^{-1}(x_k - \bar{x}_k)]. \quad (\text{A.31})$$

Para fazê-lo, começa-se derivando (A.31) em relação a \hat{x}_k como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{exp}}{\partial x_k} &= -\frac{1}{2} [2(y_k - C_k x_k)^T R_k^{-1}(-C_k) + 2(x_k - \bar{x}_k)^T \bar{P}_k^{-1}] \\ &= (y_k - C_k x_k)^T R_k^{-1} C_k - (x_k - \bar{x}_k)^T \bar{P}_k^{-1} \\ &= y_k^T R_k^{-1} C_k + \bar{x}_k^T \bar{P}_k^{-1} - x_k^T (C_k^T R_k^{-1} C_k + \bar{P}_k^{-1}). \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

A solução ótima \hat{x}_k é raiz de (A.32). Logo,

$$\left. \frac{\partial f_{exp}}{\partial x_k} \right|_{\hat{x}_k} = 0 \rightarrow \hat{x}_k^T (C_k^T R_k^{-1} C_k + \bar{P}_k^{-1}) = y_k^T R_k^{-1} C_k + \bar{x}_k^T \bar{P}_k^{-1}$$

$$\rightarrow \hat{x}_k = \underbrace{(C_k^T R_k^{-1} C_k + \bar{P}_k^{-1})^{-1} C_k^T R_k^{-1}}_{\text{Lema (A.21)}} y_k + \underbrace{(C_k^T R_k^{-1} C_k + \bar{P}_k^{-1}) \bar{P}_k^{-1} \bar{x}_k}_{\text{Lema (A.20)}}. \quad (\text{A.33})$$

Escolhendo $\mathcal{A} = \bar{P}_k^{-1}$, $\mathcal{B} = C_k^T$, $\mathcal{C} = -C_k$ e $\mathcal{D} = R_k$, a aplicação de (A.20) e (A.21) em (A.33) resulta em

$$\hat{x}_k = \bar{P}_k C_k^T (R_k + C_k \bar{P}_k C_k^T)^{-1} y_k + [\bar{P}_k - \bar{P}_k C_k^T (R_k + C_k \bar{P}_k C_k^T)^{-1} C_k \bar{P}_k] \bar{P}_k^{-1} \bar{x}_k. \quad (\text{A.34})$$

Chamando o termo $K_k = \bar{P}_k C_k^T (R_k + C_k \bar{P}_k C_k^T)^{-1}$ de Ganho de Kalman, (A.34) reduz-se a

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k (y_k - C_k \bar{x}_k), \quad (\text{A.35})$$

que corresponde à solução ótima \hat{x}_k que maximiza a probabilidade *a posteriori* em (A.19). Como (A.31) é uma função quadrática côncava, seu único ponto crítico \hat{x}_k corresponde, necessariamente, a um ponto de máximo. A equação (A.35) é o passo de correção ótima da estimativa predita \bar{x}_k pela nova medida y_k . Sabendo que a f.d.p. *a posteriori* também é Gaussiana, basta que se determine a matriz de covariâncias \hat{P}_k associada a \hat{x}_k para que $p(x_k | y_{1:k}, u_{1:k})$ fique completamente determinada. Suprimindo a dependência de \hat{P}_k em relação a $y_{1:k}$ e $u_{1:k}$ apenas por conveniência de notação, tem-se

$$\begin{aligned} \hat{P}_k &= E \{ (x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T \} \\ &= E \{ (x_k - \bar{x}_k - K_k (C_k x_k + v_k - C_k \bar{x}_k)) (\cdot)^T \} \\ &= E \{ ((\mathbb{I} - K_k C_k)(x_k - \bar{x}_k) - K_k v_k) (\cdot)^T \} \\ &= (\mathbb{I} - K_k C_k) \overbrace{E \{ (x_k - \bar{x}_k)(x_k - \bar{x}_k)^T \}}^{\bar{P}_k} (\mathbb{I} - K_k C_k)^T \\ &\quad - (\mathbb{I} - K_k C_k) \overbrace{E \{ (x_k - \bar{x}_k) v_k^T \}}^{\rightarrow 0} K_k^T - K_k \overbrace{E \{ v_k (x_k - \bar{x}_k)^T \}}^{\rightarrow 0} (\mathbb{I} - K_k C_k)^T \\ &\quad + K_k \overbrace{E \{ v_k v_k^T \}}^{R_k} K_k^T \\ &= (\mathbb{I} - K_k C_k) \bar{P}_k (\mathbb{I} - K_k C_k)^T + K_k R_k K_k^T, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

em que se utilizou o fato de que o erro de predição $(x_k - \bar{x}_k)$ e v_k são independentes. A equação (A.36) fornece a matriz de covariâncias \hat{P}_k associada à estimativa \hat{x}_k .

A.3.2 Algoritmo do FK

O algoritmo do FK apresentado a seguir é apenas uma condensação do conteúdo da Seção A.3.1 anterior. Partindo de uma estimativa inicial \hat{x}_0 e \hat{P}_0 , em que x_0 é suposta uma variável aleatória Gaussiana, o FK utiliza o modelo de evolução (A.5) para gerar estimativas preditas \bar{x}_k até a chegada de uma nova medida y_k obtida de acordo com (A.6). Neste momento, (A.35) e (A.36) são usadas para corrigir a estimativa predita \bar{x}_k , dando origem a \hat{x}_k e \hat{P}_k .

Para uma série de propriedades e fenômenos relacionados ao FK, recomenda-se a leitura do Capítulo 5 de [84] e do Capítulo 1 de [92].

Filtro de Kalman

Considere o sistema linear (A.5)-(A.6). Além disso, suponha que o vetor inicial de estados x_0 segue uma distribuição Normal. Partindo de condições iniciais

$$\hat{x}_0 = E\{x_0\}, \quad \hat{P}_0 = E\{(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T\},$$

e assumindo conhecidas as estimativas \hat{x}_{k-1} e \hat{P}_{k-1} do passo anterior, a recursão do algoritmo do FK para as estimativas do instante k atual são dadas por:

i Predição das estimativas

$$\bar{x}_k = A_{k-1}\hat{x}_{k-1} + B_{k-1}\bar{u}_{k-1}, \quad (\text{A.26})$$

$$\bar{P}_k = A_{k-1}\hat{P}_{k-1}A_{k-1}^T + B_{k-1}P_{u,k-1}B_{k-1}^T + Q_{k-1}, \quad (\text{A.27})$$

em que $u_{k-1} \sim N(\bar{u}_{k-1}, P_{u,k-1})$.

i Correção das estimativas

- Se uma medida y_k estiver disponível no instante atual, faça

$$K_k = \bar{P}_k C_k^T (R_k + C_k \bar{P}_k C_k^T)^{-1},$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k (y_k - C_k \bar{x}_k), \quad (\text{A.35})$$

$$\hat{P}_k = (\mathbb{I} - K_k C_k) \bar{P}_k (\mathbb{I} - K_k C_k)^T + K_k R_k K_k^T. \quad (\text{A.36})$$

- Caso contrário

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k, \quad (\text{A.37})$$

$$\hat{P}_k = \bar{P}_k. \quad (\text{A.38})$$

As equações (A.37) e (A.38) são úteis quando medidas de sensores não estão disponíveis a todo instante $k\tau$ de cálculo do FK, em que τ é o período de amostragem. Sem dúvida, a matriz Q_{k-1} de ruído de processo é o parâmetro do filtro que necessita da maior quantidade de esforço para o seu ajuste, uma vez que R_k é geralmente obtida a partir das especificações técnicas dos sensores. Sugere-se escolher os elementos da diagonal principal de Q_{k-1} de tal forma que seus intervalos $3\sigma_{sd}$, em que σ_{sd} denota desvio-padrão, correspondam aos máximos erros possíveis entre o modelo (A.5) e a evolução efetiva do estado x_k do sistema.

A.4 FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO (FKE)

Durante a determinação das equações para as estimativas lineares ótimas do FK na Seção A.3.1, viu-se que, para sistemas lineares, tanto a verossimilhança (A.29), quanto as densidades de probabilidade *a priori* (A.28) e *a posteriori* (A.19) são Gaussianas. Logo, todas

elas podem ser completamente caracterizadas a partir de suas respectivas médias e matrizes de covariâncias, tornando o cálculo destas f.d.p.s condicionais algo relativamente simples. No caso de sistemas não-lineares (A.3)-(A.4), no entanto, o problema é enormemente mais difícil. Em geral, não existe um conjunto finito de parâmetros capaz de caracterizar (A.19) completamente para sistemas não-lineares [45]. Enquanto que, para sistemas lineares, basta que se conheçam e propaguem duas características da distribuição (A.19) (média e matriz de covariâncias), sistemas não-lineares normalmente exigem que toda a função (A.19) seja conhecida.

O Filtro de Kalman Estendido (FKE), inicialmente proposto por Jazwinski em [45], talvez seja a extensão mais simples e direta do FK para sistemas não-lineares

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1}, \quad (\text{A.3})$$

$$y_k = h(x_k) + v_k. \quad (\text{A.4})$$

A idéia por trás do algoritmo é tomada do Cálculo diferencial: para desvios suficientemente pequenos em relação a uma posição de referência, funções deriváveis não-lineares podem ser localmente aproximadas por retas [76, 83]. Considerando incrementos Δ_x e Δ_u pequenos, a aproximação linear de primeira ordem

$$f(x_{k-1} + \Delta_x, u_{k-1} + \Delta_u) \approx f(x_{k-1}, u_{k-1}) + J_{f,x}(x_{k-1}, u_{k-1})\Delta_x + J_{f,u}(x_{k-1}, u_{k-1})\Delta_u \quad (\text{A.39})$$

torna-se uma boa aproximação local de (A.3) avaliada no ponto (x_{k-1}, u_{k-1}) , em que

$$J_{f,x}(x_{k-1}, u_{k-1}) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}} \right|_{x_{k-1}, u_{k-1}}, \quad J_{f,u}(x_{k-1}, u_{k-1}) = \left. \frac{\partial f}{\partial u_{k-1}} \right|_{x_{k-1}, u_{k-1}}, \quad (\text{A.40})$$

são, respectivamente, as matrizes Jacobianas de $f(x_{k-1}, u_{k-1})$ em relação a x_{k-1} e u_{k-1} . Análise semelhante leva à proposição do modelo linearizado

$$h(x_k + \Delta_x) \approx h(x_k) + J_{h,x}(x_k)\Delta_x, \quad (\text{A.41})$$

$$J_{h,x}(x_k) = \left. \frac{\partial h}{\partial x_k} \right|_{x_k},$$

para a equação não-linear de saída (A.4).

Resta, ainda, definir em torno de qual ponto (x_{k-1}, u_{k-1}) as derivadas em (A.40) e (A.41) devem ser avaliadas em cada passo do filtro. Procurando assegurar que Δ_x e Δ_u sejam pequenos e que, por conseguinte, (A.39) seja válida, [45] propõe que (A.3) e (A.4) sejam linearizadas em torno da melhor estimativa disponível no momento para o estado real x_k . Para (A.40), usada na linearização da função de evolução de processo (A.3), a melhor estimativa de (x_{k-1}, u_{k-1}) é dada pelas estimativas anteriores $(\hat{x}_{k-1}, \bar{u}_{k-1})$, ao passo que (A.41) é linearizada em torno da estimativa predita \bar{x}_k . Os autores em [70, 92] ressaltam que atenção especial deve ser dedicada à garantia das condições de linearidade necessárias ao FKE, visto que os modelos linearizados (A.39)-(A.41) podem gerar filtros fortemente instáveis caso as hipóteses de linearidade local sejam violadas.

A.4.1 Algoritmo do FKE

As semelhanças entre os algoritmos do FK e do FKE é patente. De fato, são exatamente as mesmas equações da Seção A.3.2 considerando o modelo linearizado (A.39)-(A.41) para propagação das incertezas através de (A.3)-(A.4). Contudo, não se pode garantir que as estimativas \hat{x}_k obtidas pelo FKE para sistemas não-lineares genéricos sejam ótimas em algum sentido. Para sistemas superamostrados⁵, nos quais a resposta dinâmica do sistema é incremental no intervalo de tempo τ entre amostras do filtro, e também para sistemas fracamente não-lineares, o modelo (A.3)-(A.4) aproxima-se de (A.5)-(A.6), dando ao FKE a capacidade de prover boas estimativas. Fora destas situações, no entanto, a violação das hipóteses de linearidade necessárias ao FKE pode tornar o seu desempenho ruim [72]. Tomadas as devidas precauções, no entanto, para assegurar seu correto funcionamento, o FKE é uma opção de fácil e rápida implementação para diversas situações práticas de filtragem de sistemas não-lineares, sendo um dos filtros mais comumente adotados para estimação de estados deste tipo de sistema [72, 91].

Em razão das diferentes notações disponíveis na literatura para representação de matrizes Jacobianas, descreve-se rapidamente a forma adotada neste trabalho antes da apresentação do algoritmo do FKE. Para uma função genérica

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}^{n_x} \mapsto \mathbb{R}^{n_y} \\ x &\mapsto g(x), \end{aligned}$$

em que $x = [x_1, x_2, \dots, x_{n_x}]^T$ e $g(x) = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_{n_y}(x)]^T$, a matriz Jacobiana $J_{g,x}$ é dada por

$$J_{g,x} = \frac{\partial g(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_{n_x}} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_{n_x}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_{n_y}(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_{n_y}(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_{n_y}(x)}{\partial x_{n_x}} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.42})$$

Filtro de Kalman Estendido

Considere o sistema não-linear (A.3)-(A.4). Partindo de condições iniciais

$$\hat{x}_0 = E\{x_0\}, \quad \hat{P}_0 = E\{(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T\},$$

e assumindo conhecidas as estimativas \hat{x}_{k-1} e \hat{P}_{k-1} do passo anterior, a recursão do algoritmo do FKE para as estimativas do instante k atual são dadas por:

⁵De acordo com [21], sistemas para os quais a frequência de amostragem $1/\tau$ é significativamente maior do que a Frequência de Nyquist.

i Predição das estimativas

$$J_{f,x} = \left. \frac{\partial f(x_{k-1}, u_{k-1})}{\partial x_{k-1}} \right|_{(\hat{x}_{k-1}, \bar{u}_{k-1})},$$

$$J_{f,u} = \left. \frac{\partial f(x_{k-1}, u_{k-1})}{\partial u_{k-1}} \right|_{(\hat{x}_{k-1}, \bar{u}_{k-1})},$$

$$\bar{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, \bar{u}_{k-1})$$

$$\bar{P}_k = J_{f,x} \hat{P}_{k-1} J_{f,x}^T + J_{f,u} P_{u,k-1} J_{f,u}^T + Q_{k-1},$$

em que $u_{k-1} \sim N(\bar{u}_{k-1}, P_{u,k-1})$.

i Correção das estimativas

- Se uma medida y_k estiver disponível no instante atual, faça

$$J_{h,x} = \left. \frac{\partial h(x_k)}{\partial x_k} \right|_{\bar{x}_k},$$

$$K_k = \bar{P}_k J_{h,x}^T (R_k + J_{h,x} \bar{P}_k J_{h,x}^T)^{-1},$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k (y_k - h(\bar{x}_k)),$$

$$\hat{P}_k = (\mathbb{I} - K_k J_{h,x}) \bar{P}_k (\mathbb{I} - K_k J_{h,x})^T + K_k R_k K_k^T.$$

- Caso contrário

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k,$$

$$\hat{P}_k = \bar{P}_k.$$

Note que o FKE preocupa-se em propagar apenas a média e a matriz de covariâncias de (A.19) por meio de linearizações locais, ainda que estas informações sejam suficientes apenas para sistemas lineares (A.5)-(A.6) [92]. Apesar da simplicidade desta representação, [72] frisa alguns benefícios desta representação:

- A propagação da média e da matriz de covariâncias de distribuições desconhecidas representa uma boa relação entre complexidade computacional e flexibilidade da representação, pois requer a manutenção de uma pequena quantidade de informações e, no entanto, é suficiente para a maior parte das atividades envolvendo estimação de estados;
- Médias e covariâncias são propagáveis por meio de transformações lineares [46], assim como foi visto nas seções anteriores. Resultados equivalentes não existem para outros momentos não-nulos de uma distribuição;

- Conjuntos de médias e covariâncias são informações suficientes para estimação de estados de sistemas com múltiplos modelos, assunto desta dissertação, e permitem que a distinção entre diferentes modos de operação seja feita adequadamente.

As principais deficiências do FKE, contudo, são observadas caso as hipóteses de linearidade local de (A.3)-(A.4) sejam violadas. Para lidar com estas situações, uma forma alternativa de propagação de média e matrizes de covariâncias através de transformações não-lineares é apresentada a seguir, dando origem ao Filtro de Kalman Unscented (FKU) da Seção A.5.2.

A.5 FILTRO DE KALMAN UNSCENTED (FKU)

A.5.1 Transformada *Unscented* (UT)

Em sua revisão a respeito da UT, Julier e Uhlmann observam em [72] que a maior parte das abordagens que procuram aproximar (A.19) por um conjunto finito de parâmetros é intratável computacionalmente ou assume hipóteses a respeito dos modelos de evolução do processo e de saída que podem não ser satisfeitas em uma situação real. O FKE, provavelmente o algoritmo de estimação de sistemas não-lineares mais amplamente utilizado, oferece uma alternativa elegante e computacionalmente eficiente para incorporação de não-linearidades ao algoritmo do FK, mas sofre com duas limitações principais. Em primeiro lugar, verificar a linearidade local de transformações não-lineares genéricas pode ser tarefa extremamente difícil, pois sua validade depende da própria forma da transformação, da estimativa em torno da qual a linearização é feita e da magnitude dos termos da matriz de covariâncias. Em segundo lugar, linearizações analíticas necessitam do cálculo explícito de matrizes Jacobianas (A.42), algo que pode não ser trivial para funções não-lineares complexas e, para transformações descontínuas, ineficaz. Neste contexto, a UT [69, 70, 72] foi desenvolvida para suprir as deficiências do método de linearização e oferecer um mecanismo mais explícito e direto para propagação de médias e covariâncias através de transformações não-lineares genéricas.

De acordo com [72], a UT baseia-se na idéia intuitiva de que é mais fácil aproximar os parâmetros de uma distribuição de probabilidade do que uma transformação não-linear genérica. Para realizar esta aproximação, suponha que o vetor de estados x_k atual tenha média $\mu_k = E\{x_k\}$ e matriz de covariâncias $P_k = E\{(x_k - \mu_k)(x_k - \mu_k)^T\}$, não sendo necessário considerar que x_k seja Gaussiano. A partir daí, um conjunto \mathcal{X} de amostras determinísticas, denominadas pontos-sigma, do vetor de estados x_k é construído de tal forma que seus elementos também tenham média μ_k e covariância P_k , em que a cada um destes pontos-sigma está associado um elemento do conjunto $\Gamma^{\mathcal{X}}$ de pesos. Aplicando-se a transformação não-linear a cada um destes pontos, tem-se uma nuvem de pontos-sigma transformados, cujos parâmetros estatísticos fornecem uma estimativa da média μ_k^{nl} e covariância P_k^{nl} propagadas

pela transformação não-linear. A análise matemática das propriedades estatísticas de pontos-sigma envolve o cálculo de momentos de Séries de Taylor de funções vetoriais multivariável e foge ao escopo desta dissertação, visto que a UT não é o tema central do trabalho. Caso haja interesse, [72] oferece uma série de apêndices a respeito das diferentes formas de escolha dos conjuntos \mathcal{X} e $\Gamma^{\mathcal{X}}$, suas propriedades e implicações na qualidade das estimativas μ_k^{nl} e P_k^{nl} . Outras análises são feitas no Apêndice A de [92] e no Capítulo 14 de [84].

Ainda que seja um método de estimação baseado em amostragem, podendo-se chegar à conclusão de que a UT seja semelhante a um filtro de partículas [67, 68], existe uma diferença fundamental entre estes dois métodos: enquanto filtros de partículas geram um grande número de amostras aleatoriamente a partir de uma distribuição de probabilidades, as amostras da UT são escolhidas de maneira determinística e de forma tal que certas propriedades estatísticas específicas sejam representadas por um número muito reduzida de pontos-sigma. Mesmo a UT sendo um método de implementação bastante simples, mostra-se que suas aproximações de (A.19) são precisas até terceira ordem⁶ para entradas Gaussianas transformadas por qualquer função não-linear e, para entradas não-Gaussianas, precisas até segunda ordem [92]. O FKE, por sua vez, só é capaz de fornecer aproximações lineares precisas de primeira ordem. De acordo com [72], é possível obter aproximações de quarta ordem para os momentos de (A.19) envolvendo transformações não-lineares de entradas Gaussianas dependendo da escolha dos pesos em $\Gamma^{\mathcal{X}}$.

Para propiciar uma melhor compreensão dos conceitos relacionados à UT, faz-se a seguir uma análise de uma situação prática de utilização da transformada em um sistema de detecção por radar, um dos exemplos discutidos em [72]. O objetivo é, a partir de medidas de distância R_{range} (*range*) e orientação Θ_{bear} (*bearing*) de um corpo fornecidas por um radar, estimar sua posição cartesiana em relação a um referencial absoluto. Em termos matemáticos, é necessário realizar a conversão

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = g_{pol}(R_{range}, \Theta_{bear}) = \begin{pmatrix} R_{range} \cos(\Theta_{bear}) \\ R_{range} \sin(\Theta_{bear}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.43})$$

de coordenadas polares $(R_{range}, \Theta_{bear})$ para cartesianas (x, y) , em que x, y e R_{range} são dados em metros e Θ_{bear} é medido em radianos. Assume-se que o corpo ocupe a posição real $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 1)$ ou, equivalentemente, $(\bar{R}_{range}, \bar{\Theta}_{bear}) = (1, \pi/2)$. As medidas do radar têm matriz de covariâncias

$$R_{radar} = \begin{bmatrix} 0.02^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{15^\circ \times 180}{\pi} \right) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.44})$$

ou seja, desvios-padrão $\sigma_{sd,R} = 2$ cm para R_{range} e $\sigma_{sd,\Theta} = 15^\circ$ para Θ_{bear} . Supondo que R_{range} e Θ_{bear} sejam entradas Gaussianas, geraram-se aleatoriamente as amostras mostradas na Figura A.3(a), cujas transformações por (A.43) estão na Figura A.3(b). Note que a grande incerteza relacionada a Θ_{bear} tende a espalhar as amostras em torno de um arco.

⁶Referência às potências da Série de Taylor dos momentos de (A.19).

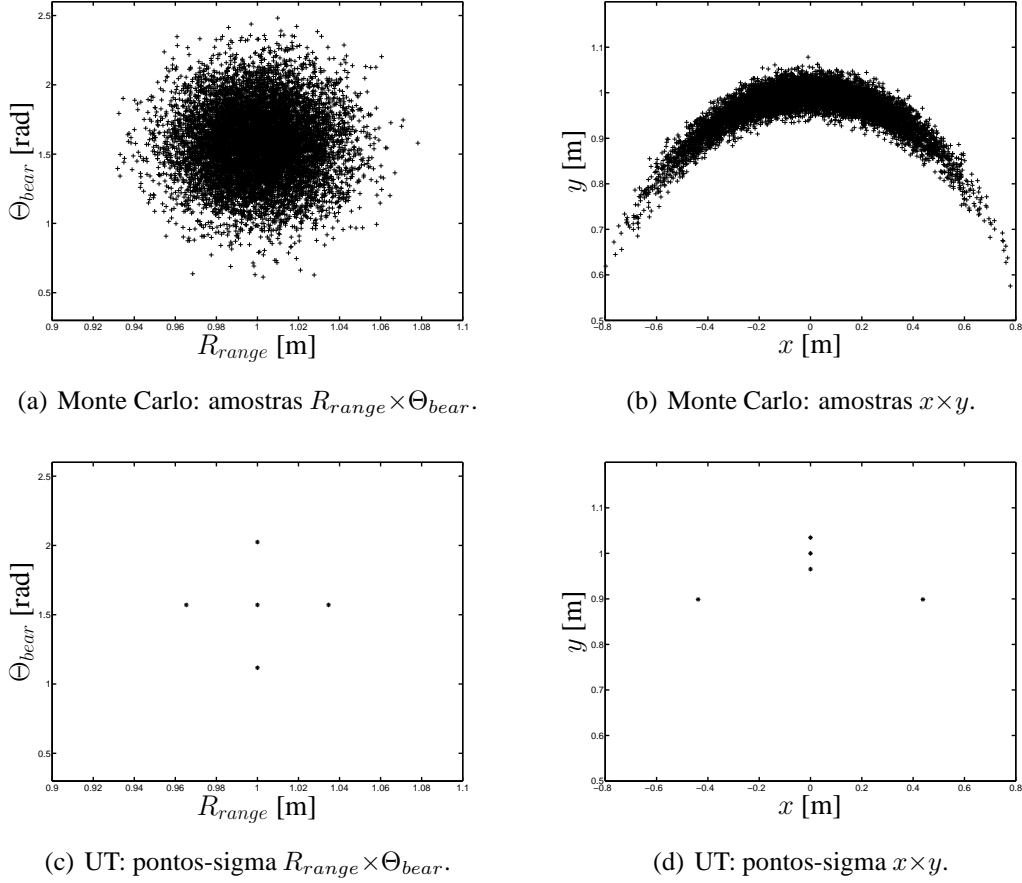


Figura A.3: Propagação de incertezas através da transformação de coordenadas polares $(R_{range}, \Theta_{bear})$ para coordenadas cartesianas (x, y) em situação de alto ruído do ângulo de orientação Θ_{bear} . Para geração de (a) e (b), foram utilizadas 10.000 amostras Gaussianas.

Para seleção dos pontos-sigma mostrados na Figura A.3(c), foi usado o critério de escolha e ponderação

$$\begin{aligned}
 \chi^0 &= \begin{bmatrix} \bar{R}_{range} \\ \bar{\Theta}_{bear} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}, \\
 \gamma^0 &= \frac{1}{3}, \\
 \chi^i &= \chi^0 + \left(\sqrt{\frac{n_{pol}}{1-\gamma^0}} R_{radar} \right)_i, \\
 \chi^{i+n_{pol}} &= \chi^0 - \left(\sqrt{\frac{n_{pol}}{1-\gamma^0}} R_{radar} \right)_i, \\
 \gamma^i &= \gamma^{i+n_{pol}} = \frac{1-\gamma^0}{2n_{pol}}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n_{pol}\},
 \end{aligned} \tag{A.45}$$

em que $\mathcal{X} = \{\chi^0, \chi^1, \dots, \chi^{2n_{pol}}\}$ e $\Gamma^{\mathcal{X}} = \{\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{2n_{pol}}\}$, $n_{pol} = 2$ é a dimensão do vetor $[R_{range}, \Theta_{bear}]^T$ e

$$\left(\sqrt{\frac{n_{pol}}{1-\gamma^0}} R_{radar} \right)_i$$

corresponde à i -ésima coluna da Decomposição de Cholesky⁷ da matriz sendo operada. Ainda que seja possível escolher valores diferentes para γ^0 , [72] mostra que $\gamma^0 = 1/3$ é a melhor escolha para entradas Gaussianas. A escolha dos pesos em Γ^x está sujeita à restrição

$$\sum_{i=0}^{2n_{pol}} \gamma^i = 1.$$

A transformação por meio de (A.43) dos pontos-sigma da Figura A.3(c) é mostrada na Figura A.3(d).

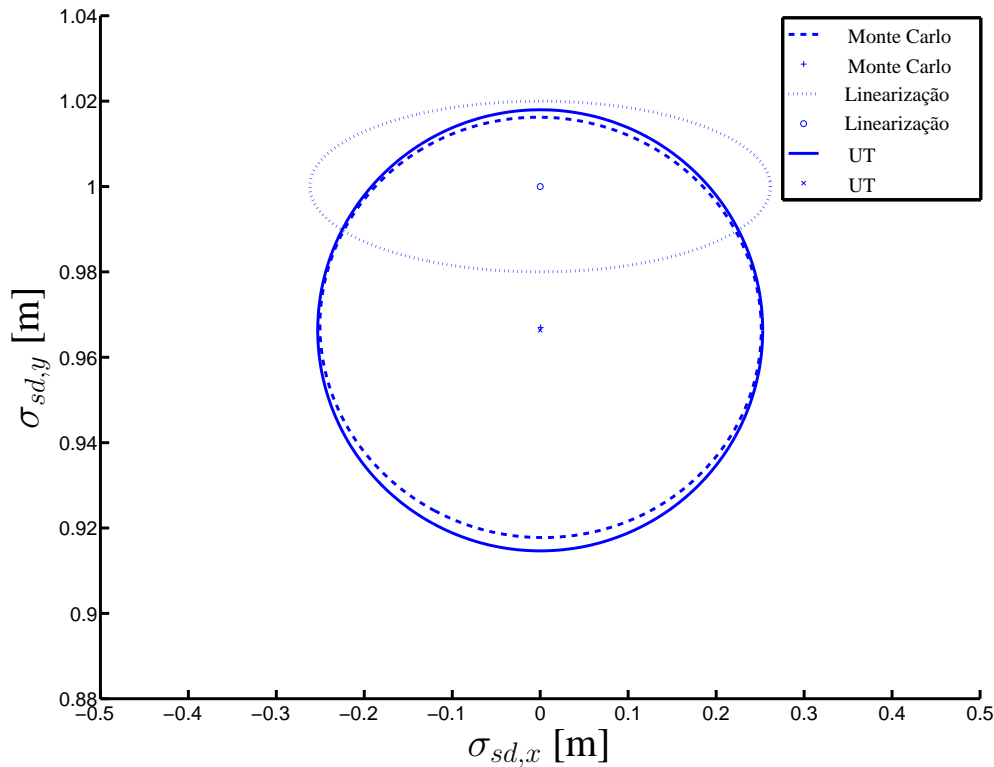


Figura A.4: Comparação entre os métodos de Monte Carlo, UT e linearização para propagação de médias e covariâncias em situação de alto ruído do ângulo de orientação Θ_{bear} .

Uma comparação entre formas de propagação de incertezas é feita na Figura A.4, em que são mostradas as elipses $1\sigma_{sd}$ obtidas por meio de três métodos distintos:

- **Simulações de Monte Carlo:** um conjunto de 10.000 amostras Gaussianas de R_{range} e Θ_{bear} com matriz de covariâncias dada por (A.44) foi gerado aleatoriamente (Figura A.3(a)). Estas amostras foram posteriormente transformadas por (A.43) (Figura A.3(b)) e sua média e covariância amostrais foram determinadas. Em razão do grande número de amostras utilizado, este método serviu como parâmetro de comparação para os dois subsequentes;

⁷A Decomposição de Cholesky $\sqrt{A} = B$ da matriz A é a matriz B tal que $A = BB^T$.

- **UT:** os pontos-sigma escolhidos segundo (A.45) (Figura A.3(c)) foram transformados por (A.43) (Figura A.3(d)) e sua média μ_{UT}^{cart} e matriz de covariâncias P_{UT}^{cart} foram determinadas por meio das equações

$$\begin{aligned}\chi^{i, cart} &= g_{pol}(\chi^i), \\ \mu_{UT}^{cart} &= \sum_{i=0}^{2n_{pol}} \chi^{i, cart} \gamma^i, \\ P_{UT}^{cart} &= \sum_{i=0}^{2n_{pol}} \gamma^i (\chi^{i, cart} - \mu^{cart}) (\chi^{i, cart} - \mu^{cart})^T; \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

- **Linearização:** à semelhança do FKE, a obtenção da matriz de covariâncias P_{Lin}^{cart} pelo método de linearização necessita do cálculo da matriz Jacobiana de (A.43), que é dada por

$$J_{g_{pol}} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta_{bear}) & -R_{range} \sin(\Theta_{bear}) \\ \sin(\Theta_{bear}) & R_{range} \cos(\Theta_{bear}) \end{bmatrix}.$$

Logo, as estimativas da média μ_{Lin}^{cart} e da matriz de covariâncias P_{Lin}^{cart} do método de linearização são dadas por

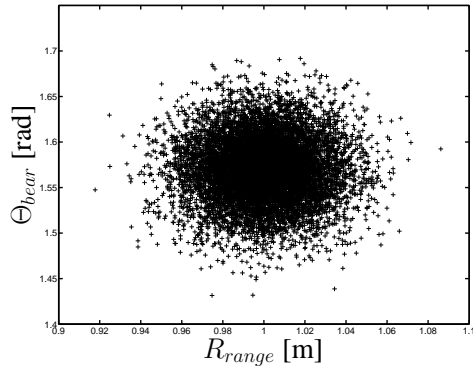
$$\begin{aligned}\mu_{Lin}^{cart} &= \begin{bmatrix} \bar{R}_{range} \\ \bar{\Theta}_{bear} \end{bmatrix}, \\ P_{Lin}^{cart} &= J_{g_{pol}} R_{radar} J_{g_{pol}}^T, \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

em que $J_{g_{pol}}$ é avaliada em $(\bar{R}_{range}, \bar{\Theta}_{bear})$.

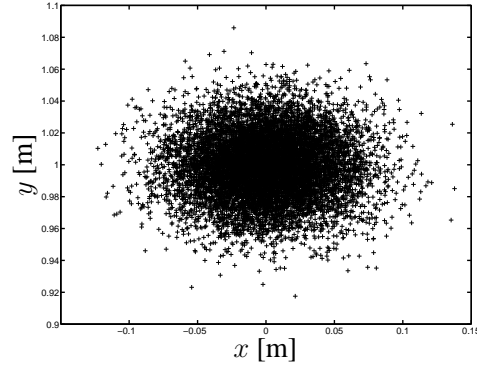
Em que pese o pequeno número de pontos-sigma utilizado (apenas 5), a Figura A.4 mostra que a UT forneceu uma estimativa não-viesada (as médias estimadas pelo método de Monte Carlo e UT coincidem) e consistente (a elipse de incerteza da UT contém a elipse de Monte Carlo), mostrando a precisão desta transformada na propagação de incertezas através de transformações não-lineares. O método de linearização, por outro lado, teve suas estimativas fortemente prejudicadas pela grande incerteza associada a Θ_{bear} , que atua no sentido de violar a hipótese de linearidade local de (A.43). Como pode ser visto na Figura A.4, a estimativa de média obtida por linearização é viesada em relação à média de Monte Carlo. Além disso, a elipse de incerteza estimada é subestimada e inconsistente, pois não inclui o valor real da média da transformação. Estas são demonstrações claras dos problemas advindos da violação das hipóteses de linearidade do FKE na estimação de estados de sistemas não-lineares, motivando a proposição do FKU na Seção A.5.2. Além da precisão de suas estimativas, fruto da escolha judiciosa de seus pontos-sigma, outras vantagens podem ser atribuídas à UT:

- Por se tratar de uma transformação baseada em amostragem, não é necessário o cálculo de matrizes Jacobianas para propagação de incertezas, algo que pode ser difícil, ou até mesmo impossível, para transformações não-lineares genéricas;

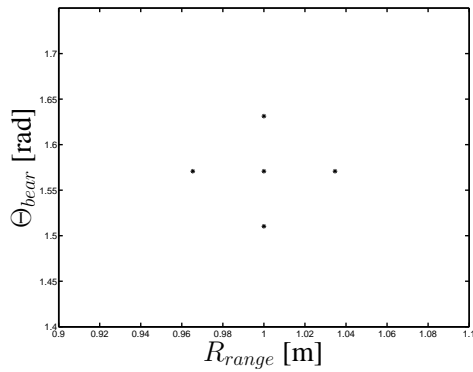
- As operações de maior complexidade computacional na UT são o cálculo da Decomposição de Cholesky em (A.45) e dos produtos externos em (A.46) para determinação da matriz de covariâncias. Contudo, estas operações têm custo comparável ao produto matricial em (A.47) para o método de linearização;
- A UT pode ser utilizada com transformações não-lineares descontínuas, o que não acontece com a linearização.



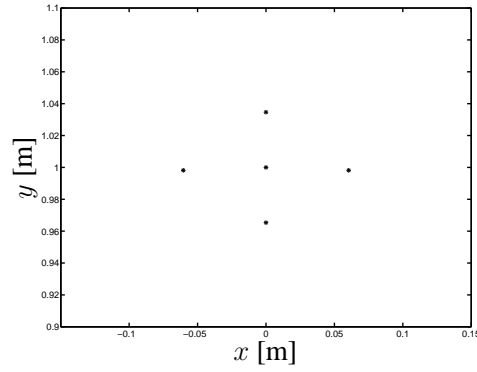
(a) Monte Carlo: amostras $R_{range} \times \Theta_{bear}$.



(b) Monte Carlo: amostras $x \times y$.



(c) UT: pontos-sigma $R_{range} \times \Theta_{bear}$.



(d) UT: pontos-sigma $x \times y$.

Figura A.5: Amostras para propagação de incertezas através da transformação de coordenadas polares $(R_{range}, \Theta_{bear})$ para coordenadas cartesianas (x, y) em situação de baixo ruído do ângulo de orientação Θ_{bear} . Para geração de (a) e (b), foram utilizadas 10.000 amostras Gaussianas.

Antes de prosseguir com a discussão, faz-se uma pequena ressalva com relação aos resultados da Figura A.4. Em razão das péssimas estimativas obtidas nesta figura pelo método de linearização, pode-se chegar à conclusão de que o FKE, um filtro baseado em linearizações de primeira ordem, é uma escolha inadequada ou sempre inferior ao FKU, filtro baseado na UT, para propagação de incertezas de sistemas não-lineares. Isto, no entanto, não é sempre verdade, nem mesmo para a transformação (A.43). A razão dos problemas da linearização verificados na Figura A.4 foi o ruído $\sigma_{sd,\Theta} = 15^\circ$ um tanto excessivo para Θ_{bear} , valor assumido em [72] provavelmente para tornar absolutamente inválidas as hipóteses de linearidade

local de (A.43) e enfatizar as vantagens da UT. Todavia, caso um outro sistema sistema de radar mais aprimorado com desvio-padrão $\sigma_{sd,\Theta} = 2^\circ$ fosse utilizado, a dispersão de pontos na Figura A.3(b) seria muito menor, tornando razoável assumir a linearidade local de (A.43) para qualquer ponto de operação. A fim de verificar esta última afirmativa, simulações idênticas às anteriores foram feitas e seus resultados são mostrados nas Figuras A.5 e A.6.

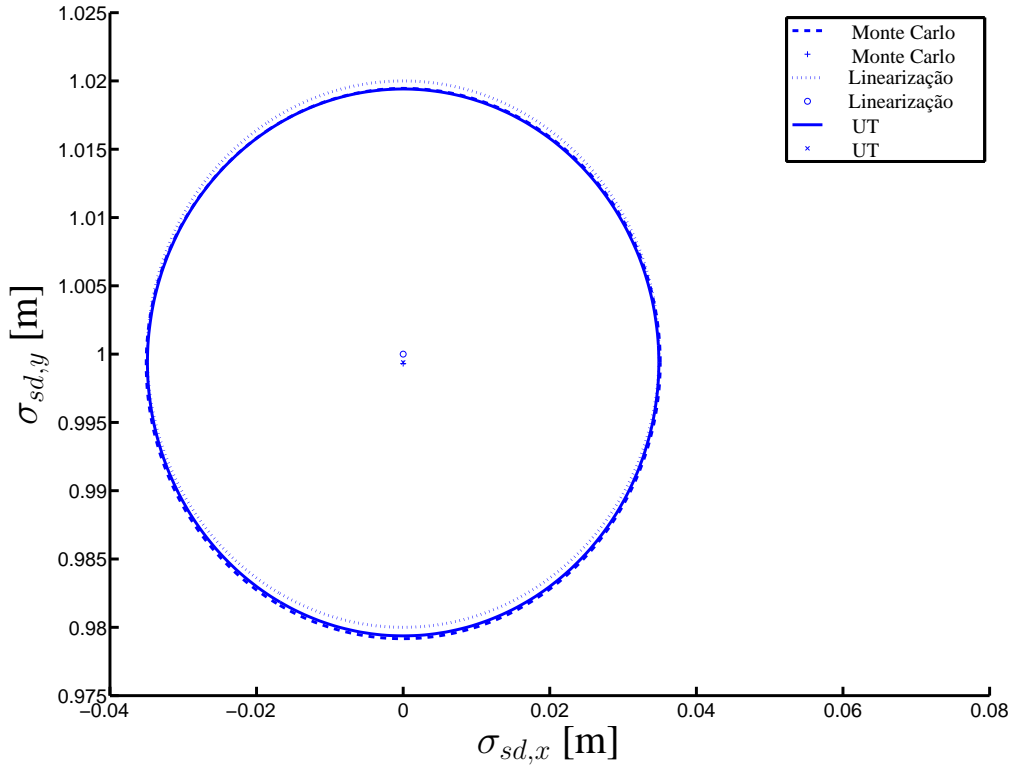


Figura A.6: Comparação entre os métodos de Monte Carlo, UT e linearização para propagação de médias e covariâncias em situação de baixo ruído do ângulo de orientação Θ_{bear} .

Neste novo contexto de operação menos perturbado, note que os pontos-sigma nas Figuras A.5(c) e A.5(d) têm praticamente a mesma disposição, havendo apenas uma mudança de escala do gráfico. O mesmo acontece com as amostras das Figuras A.5(a) e A.5(b), em uma clara indicação da validade de se aproximar (A.43) localmente por uma transformação linear. Quanto à Figura A.6, a propagação de incertezas de todos os três métodos foi praticamente idêntica. Além da UT não apresentar ganhos significativos de desempenho, a implementação do algoritmo (A.45) para seleção de pontos-sigma mostrou-se mais complexa do que o cálculo da matriz Jacobiana (A.47) para a transformação de coordenadas polares para cartesianas. Em vista desta nova situação, talvez se pudesse concluir que o FKE seria a escolha mais adequada.

Em razão desta impossibilidade de se estabelecer um estimador ótimo para todas as situações envolvendo sistemas não-lineares, propõe-se aqui uma adaptação da sabedoria popular

para o contexto de estimação e filtragem estocástica, cunhando-se um provérbio de estimação de estados para sistemas não-lineares:

“A ocasião faz o algoritmo de estimação.”

A.5.2 Algoritmo do FKU

Ao discutir o FKU em [92], Haykin observa que este filtro não precisa supor um modelo não-linear tal qual (A.3)-(A.4), em que os termos de ruído w_{k-1} e v_k são supostos aditivos e Gaussianos. A rigor, nem mesmo o FKE necessita desta hipótese de ruído aditivo, ainda que a proposição original do FKE em [45] a tenha considerado. A vantagem de considerar w_{k-1} e v_k apenas se somando às funções de evolução de processo e de medição é simplificar o cálculo das matrizes Jacobianas, uma vez que os termos de ruído são excluídos do vetor de estados, e facilitar a propagação de incertezas, pois as matrizes Q_{k-1} e R_k são diretamente somadas nas equações de cálculo das matrizes de covariâncias das estimativas. Contudo, em virtude das características que o FKU herda da UT, dentre elas a propagação de incertezas feita sem a necessidade de determinação de matrizes Jacobianas, pode-se considerar um modelo mais genérico

$$x_k = f'(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}), \quad (\text{A.48})$$

$$y_k = h'(x_k, v_k), \quad (\text{A.49})$$

em que $w_{k-1} \sim (0, Q_{k-1})$ e $v_k \sim (0, R_k)$ são processos de ruído quaisquer (inclusive correlacionados) não necessariamente Gaussianos; e $u_{k-1} \sim (\bar{u}_{k-1}, P_{u,k-1})$ é o vetor de entradas do sistema, ao qual também está associada uma incerteza. Unindo (A.45) e (A.47) à estrutura do FK, dá-se origem ao FKU, uma extensão para sistemas não-lineares que utiliza a UT para propagar médias e covariâncias de estimativas. Para correta incorporação da influência dos termos de ruído w_{k-1} e v_k sobre o sistema, [72, 92] sugerem considerar o vetor de estados aumentado

$$x_k^a = [x_k^T, u_k^T, w_k^T, v_k^T]^T \quad (\text{A.50})$$

com matriz de covariâncias

$$P_k^a = \begin{bmatrix} P_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{u,k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_k \end{bmatrix}. \quad (\text{A.51})$$

Caso exista correlação entre os diferentes elementos formadores de (A.50), basta escolher os termos fora da diagonal principal de (A.51) com valores não-nulos.

Duas formulações do FKU são apresentadas a seguir. A primeira diz respeito a sistemas não-lineares (A.48)-(A.49) com ruído não-aditivo, enquanto a segunda considera o modelo (A.3)-(A.4) com entradas de perturbação somadas.

Filtro de Kalman *Unscented* (Ruído não-aditivo)

Considere o sistema não-linear (A.48)-(A.49). Partindo de condições iniciais

$$\hat{x}_0 = E\{x_0\}, \quad \hat{P}_0 = E\{(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T\},$$

$$\hat{x}_0^a = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ u_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{P}_0^a = E\{(x_0^a - \hat{x}_0^a)(x_0^a - \hat{x}_0^a)^T\} = \begin{bmatrix} \hat{P}_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{u,0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_0 \end{bmatrix},$$

e assumindo conhecidas as estimativas \hat{x}_{k-1} e \hat{P}_{k-1} do passo anterior, a recursão do algoritmo do FKU para as estimativas do instante k atual são dadas por:

i Cálculo dos pontos-sigma

$$\chi_{k-|k-1}^{0,a} = \hat{x}_{k-1}^a = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1} \\ \bar{u}_{k-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma^0 = W^0,$$

$$\chi_{k-|k-1}^{i,a} = \chi_{k-|k-1}^{0,a} + \left(\sqrt{\frac{n_a}{1-\gamma^0} \hat{P}_{k-1}^a} \right)_i,$$

$$\chi_{k-|k-1}^{i+n_a,a} = \chi_{k-|k-1}^{0,a} - \left(\sqrt{\frac{n_a}{1-\gamma^0} \hat{P}_{k-1}^a} \right)_i,$$

$$\gamma^i = \gamma^{i+n_a} = \frac{1-\gamma^0}{2n_a}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n_a\},$$

em que $n_a = n_x + n_u + n_w + n_v$ é a dimensão do vetor x_k^a ; W^0 é o peso do ponto central $\chi_{k-|k-1}^{0,a}$; $\Gamma^{\mathcal{X}} = \{\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{n_a}\}$ é o conjunto de pesos; e

$$\mathcal{X}_{k-|k-1}^a = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{k-|k-1}^x \\ \mathcal{X}_{k-|k-1}^u \\ \mathcal{X}_{k-|k-1}^w \\ \mathcal{X}_{k-|k-1}^v \end{bmatrix}$$

é o conjunto de pontos-sigma do sistema aumentado com suas componentes x , u , w e v explicitadas.

ii Predição de estimativas

1. Transformação dos pontos-sigma

$$\chi_{k|k-1}^{i,x} = f'(\chi_{k-|k-1}^{i,x}, \chi_{k-|k-1}^{i,u}, \chi_{k-|k-1}^{i,w}),$$

2. Cálculo da estimativa e da matriz de covariâncias preditas

$$\bar{x}_k = \sum_{i=0}^{2n_a} \gamma^i \chi_{k|k-1}^{i,x},$$

$$\bar{P}_k = \sum_{i=0}^{2n_a} \gamma^i \left(\chi_{k|k-1}^{i,x} - \bar{x}_k \right) \left(\chi_{k|k-1}^{i,x} - \bar{x}_k \right)^T.$$

iii Correção das estimativas

1. Geração dos pontos-sigma do modelo de saída

$$\chi_{k|k-1}^{i,y} = h'(\chi_{k|k-1}^{i,x}, \chi_{k-1|k-1}^{i,v}),$$

2. Cálculo da observação predita

$$\bar{y}_k = \sum_{i=0}^{2n_a} \gamma^i \chi_{k|k-1}^{i,y}.$$

3. Cálculo da matriz de covariâncias do termo de inovação

$$P_{yy,k} = \sum_{i=0}^{2n_a} \gamma^i \left(\chi_{k|k-1}^{i,y} - \bar{y}_k \right) \left(\chi_{k|k-1}^{i,y} - \bar{y}_k \right)^T.$$

4. Cálculo da matriz de correlação cruzada

$$P_{xy,k} = \sum_{i=0}^{2n_a} \gamma^i \left(\chi_{k|k-1}^{i,x} - \bar{x}_k \right) \left(\chi_{k|k-1}^{i,y} - \bar{y}_k \right)^T.$$

5. Correção das estimativas

$$K_k = P_{xy,k} P_{yy,k}^{-1},$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k (y_k - \bar{y}_k),$$

$$\hat{P}_k = \bar{P}_k - K_k P_{yy,k} K_k^T.$$

Caso, no entanto, se esteja lidando com sistemas não-lineares (A.3)-(A.4) com ruído aditivo, o FKU simplifica-se para o algoritmo a seguir.

Filtro de Kalman Unscented (Ruído aditivo)

Considere o sistema não-linear (A.3)-(A.4). Partindo de condições iniciais

$$\hat{x}_0 = E\{x_0\}, \quad \hat{P}_0 = E\{(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T\},$$

$$\hat{x}_0^a = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix}, \quad \hat{P}_0^a = E\{(x_0^a - \hat{x}_0^a)(x_0^a - \hat{x}_0^a)^T\} = \begin{bmatrix} \hat{P}_0 & 0 \\ 0 & P_{u,0} \end{bmatrix},$$

e assumindo conhecidas as estimativas \hat{x}_{k-1} e \hat{P}_{k-1} do passo anterior, a recursão do algoritmo do FKU para as estimativas do instante k atual são dadas por:

i Cálculo dos pontos-sigma

$$\begin{aligned}\chi_{k-|k-1}^{0,a} &= \hat{x}_{k-1}^a = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1} \\ \hat{u}_{k-1} \end{bmatrix}, \\ \gamma^0 &= W^0, \\ \chi_{k-|k-1}^{i,a} &= \chi_{k-|k-1}^{0,a} + \left(\sqrt{\frac{n_a}{1-\gamma^0} \hat{P}_{k-1}^a} \right)_i, \\ \chi_{k-|k-1}^{i+n_a,a} &= \chi_{k-|k-1}^{0,a} - \left(\sqrt{\frac{n_a}{1-\gamma^0} \hat{P}_{k-1}^a} \right)_i, \\ \gamma^i &= \gamma^{i+n_a} = \frac{1-\gamma^0}{2n_a}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n_a\},\end{aligned}$$

em que $n_a = n_x + n_u$ é a dimensão do vetor x_k^a ; W^0 é o peso do ponto central $\chi_{k-|k-1}^{0,a}$; $\Gamma^{\mathcal{X}} = \{\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{n_a}\}$ é o conjunto de pesos; e

$$\mathcal{X}_{k-|k-1}^a = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{k-|k-1}^x \\ \mathcal{X}_{k-|k-1}^u \end{bmatrix}$$

é o conjunto de pontos-sigma do sistema aumentado com suas componentes x e u explicitadas.

ii Predição de estimativas

1. Transformação dos pontos-sigma

$$\chi_{k|k-1}^{i,x} = f'(\chi_{k-|k-1}^{i,x}, \chi_{k-|k-1}^{i,u}),$$

2. Cálculo da estimativa e da matriz de covariâncias preditas

$$\begin{aligned}\bar{x}_k &= \sum_{i=0}^{2n_a} \gamma^i \chi_{k|k-1}^{i,x}, \\ \bar{P}_k &= \sum_{i=0}^{2n_a} \gamma^i \left(\chi_{k|k-1}^{i,x} - \bar{x}_k \right) \left(\chi_{k|k-1}^{i,x} - \bar{x}_k \right)^T + Q_k.\end{aligned}$$

iii Correção das estimativas

1. Geração dos pontos-sigma do modelo de saída

$$\chi_{k|k-1}^{i,y} = h'(\chi_{k|k-1}^{i,x}),$$

2. Cálculo da observação predita

$$\bar{y}_k = \sum_{i=0}^{2n_a} \gamma^i \chi_{k|k-1}^{i,y}.$$

3. Cálculo da matriz de covariâncias do termo de inovação

$$P_{yy,k} = \sum_{i=0}^{2n_a} \gamma^i \left(\chi_{k|k-1}^{i,y} - \bar{y}_k \right) \left(\chi_{k|k-1}^{i,y} - \bar{y}_k \right)^T + R_k.$$

4. Cálculo da matriz de correlação cruzada

$$P_{xy,k} = \sum_{i=0}^{2n_a} \gamma^i \left(\chi_{k|k-1}^{i,x} - \bar{x}_k \right) \left(\chi_{k|k-1}^{i,y} - \bar{y}_k \right)^T.$$

5. Correção das estimativas

$$K_k = P_{xy,k} P_{yy,k}^{-1},$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k (y_k - \bar{y}_k),$$

$$\hat{P}_k = \bar{P}_k - K_k P_{yy,k} K_k^T.$$