

HAUTEUR ASYMPTOTIQUE DES POINTS DE HEEGNER

GUILLAUME RICOTTA - THOMAS VIDICK

ABSTRACT. Geometric intuition suggests that the Néron-Tate height of Heegner points on a rational elliptic curve E should be asymptotically governed by the degree of its modular parametrisation. In this paper, we show that this geometric intuition asymptotically holds on average over a subset of discriminants. We also study the asymptotic behaviour of traces of Heegner points on average over a subset of discriminants and find a difference according to the rank of the elliptic curve. By the Gross-Zagier formulae, such heights are related to the special value at the critical point for either the derivative of the Rankin-Selberg convolution of E with a certain weight one theta series attached to the principal ideal class of an imaginary quadratic field or the twisted L -function of E by a quadratic Dirichlet character. Asymptotic formulae for the first moments associated to these L -series and L -functions are proved and experimental results are discussed. The appendix contains some conjectural application of our results to the problem of the discretisation of odd quadratic twists of elliptic curves.

En l'honneur du Professeur Henryk Iwaniec, pour l'ensemble de son oeuvre analytique et pour son titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Bordeaux 1.

TABLE DES MATIÈRES

1. Description de la problématique	2
2. Préliminaires	3
3. Les traces	5
3.1. Mise en place	5
3.2. Courbes de rang analytique 0	6
3.3. Courbes de rang analytique 1	9
4. Estimation asymptotique de la hauteur des points de Heegner	12
5. Analyse des résultats théoriques et numériques	21
5.1. Quelques valeurs numériques	21
5.1.1. Valeurs numériques de C_{Tr} et de C_{P}	21
5.1.2. Étude plus fine du rapport $C_{\text{P}}/C_{\text{Tr}}^{(0)}$	22
5.2. Résultats expérimentaux	22
5.2.1. Comparaison entre les valeurs expérimentale et théorique de C_{P}	22
5.2.2. Étude plus fine des courbes 37A et 37B	24
Annexe A. Un résultat de non-annulation pour les tordues quadratiques paires de courbes elliptiques	26

Date: Version of 13 juin 2006.

2005 Mathematics Subject Classification: 11G50, 11M41.

Annexe B. Discrétisation de la valeur spéciale des torques quadratiques impaires de courbes elliptiques	27
B.1. Conjecture du Samedi Soir selon Conrey, Rubinstein, Snaith et Watkins	27
B.2. Contribution personnelle dans un cas particulier de la Conjecture du Samedi Soir	28
B.2.1. Description du modèle de B.J. Birch des points de Heegner	28
B.2.2. Reformulation conjecturale de la Conjecture du Samedi Soir	29
B.2.3. Mise en évidence d'un lien conjectural entre régulateur et groupe de Tate-Shafarevitch	29
Références	30

1. DESCRIPTION DE LA PROBLÉMATIQUE

L'étude calculatoire systématique de la hauteur de Néron-Tate des points de Heegner sur différentes courbes elliptiques montre de grandes disparités. Si l'on considère deux courbes elliptiques de même conducteur N alors les points de Heegner sur ces deux courbes sont l'image des mêmes points spéciaux de la courbe modulaire de niveau N notée $X_0(N)$ par la paramétrisation modulaire et on s'attend donc à ce que leurs hauteurs soient dans le même rapport que les degrés de ces paramétrisations. Cependant, la figure 1 montre que le comportement des hauteurs est très irrégulier : même si les courbes 37A et 37B (dans la notation de Cremona ([Cr])) ont le même conducteur et le même degré, les points paraissent légèrement plus gros sur la 37B que sur la 37A.

Nous allons montrer que l'intuition se vérifie asymptotiquement : à conducteur fixé¹, la moyenne sur une certaine sous-classe de discriminants de la hauteur des points de Heegner est proportionnelle au degré.

Pour cela, nous allons procéder à partir de la formule de Gross-Zagier ([GrZa]) et raisonner sur les séries de Dirichlet et les fonctions L en nous servant principalement d'un résultat de H. Iwaniec ([Iw]).

Remerciements. Les auteurs remercient chaleureusement H. Darmon pour leur avoir suggéré cette problématique et pour ses nombreux conseils et encouragements. Ce travail a été réalisé à l'occasion d'un stage d'études à McGill University (Montréal) pour le second auteur et d'un stage post-doctoral à l'Université de Montréal (Montréal) pour le premier auteur. Les excellentes conditions de travail offertes par ces deux institutions ont fortement contribué à la réalisation de cet article. Le premier auteur a largement profité de la générosité et des conseils Mathématiques avisés de A. Granville lors de son stage post-doctoral. Enfin, les auteurs remercient l'arbitre pour sa lecture attentive et ses suggestions éclairées.

¹Toutefois, nous prendrons soin de garder explicite toute dépendance en le conducteur N de la courbe.

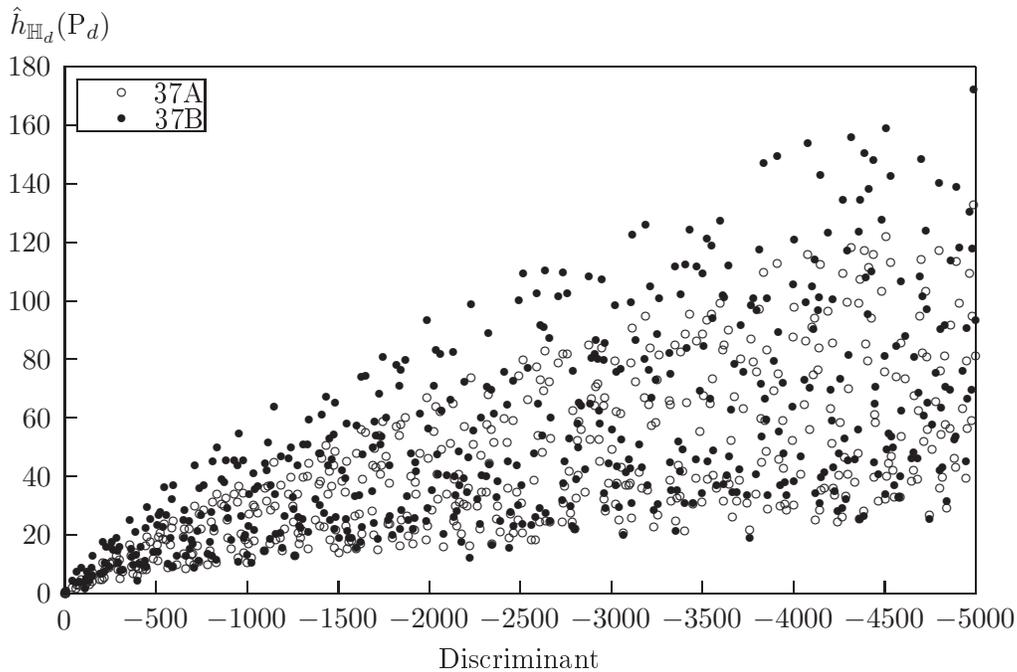


FIG. 1. Comportement des points de Heegner sur les courbes 37A et 37B

2. PRÉLIMINAIRES

Soit $X_0(N)$ la courbe modulaire de niveau N classifiant les paires de courbes elliptiques (E_1, E_2) reliées par une isogénie cyclique de degré N . Une description analytique sur \mathbb{C} de cette courbe est donnée par le quotient du demi-plan de Poincaré complété $\mathbb{H} \cup (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$ par l'action par homographies du groupe de congruence $\Gamma_0(N)$.

Soit E une courbe elliptique définie sur \mathbb{Q} de conducteur N sans facteurs carrés. A. Wiles et R. Taylor ([Wi] et [TaWi]) ont prouvé la *modularité* de E dont un corollaire important est l'existence d'une application non constante $\Phi_{N,E} : X_0(N) \rightarrow E$ satisfaisant $\Phi_{N,E}(\infty) = 0$ appelée *paramétrisation modulaire* de E . Le *degré* noté $\deg(\Phi_{N,E})$ de cette application est un invariant important et il est intéressant de connaître la croissance de celui-ci par rapport au conducteur N . Selon la conjecture du degré (cf. [Mu] et [De] page 35) qui est équivalente à une des formes de la conjecture abc, on aurait

$$(2.1) \quad \deg(\Phi_{N,E}) \ll_{\epsilon} N^{2+\epsilon}$$

pour tout $\epsilon > 0$.

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{D} := \{d \in \mathbb{Z}, d < 0, \mu^2(d) = 1, d \equiv \nu^2 \pmod{4N}, (\nu, 4N) = 1\}$$

de discriminants. Pour d dans \mathcal{D} , notons \mathbb{H}_d le corps de classe de Hilbert du corps quadratique imaginaire $\mathbb{K}_d := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et souvenons-nous que $G_d := \text{Gal}(\mathbb{H}_d|\mathbb{K}_d)$ est isomorphe au groupe de classes Cl_d de \mathbb{K}_d de cardinal le nombre de classes h_d .

Définition 2.1. Un *point de Heegner de niveau N et de discriminant d* est un couple ordonné (E_1, E_2) de courbes elliptiques muni d'une isogénie cyclique de degré N tel que E_1 et E_2 aient multiplication complexe par l'anneau des entiers \mathcal{O}_d de \mathbb{K}_d .

Notons $SS(d, N)$ l'ensemble des racines carrées modulo $2N$ de d modulo $4N$. Pour tout élément s de $SS(d, N)$, désignons par $\mathfrak{n}(s)$ l'idéal entier primitif de norme N suivant :

$$\mathfrak{n}(s) := \left(N, \frac{s + \sqrt{d}}{2} \right).$$

Selon le Théorème 2.6 de [Wa2], l'ensemble des points de Heegner de niveau N et de discriminant d est en bijection avec $SS(d, N) \times Cl(d)$ de la façon suivante : si $[\mathfrak{a}]$ est l'élément du groupe de classes Cl_d associé à l'idéal entier primitif \mathfrak{a} de \mathcal{O}_d et s est un élément de $SS(d, N)$ alors $(\mathbb{C}/\mathfrak{a}, \mathbb{C}/\mathfrak{an}(s)^{-1})$ est un point de Heegner de niveau N et de discriminant d . Le point du demi-plan de Poincaré modulo $\Gamma_0(N)$ correspondant à ce point de Heegner est donné par $\frac{-B+\sqrt{d}}{2A}$ modulo $\Gamma_0(N)$ où (A, B, C) est la forme quadratique de discriminant d correspondant à $[\mathfrak{a}]$ et où $N \mid A$ et $B \equiv s \pmod{2N}$.

Définition 2.2. Un *point de Heegner de niveau N et de discriminant d sur E* est l'image par la paramétrisation modulaire $\Phi_{N,E} : X_0(N) \rightarrow E$ d'un point de la forme

$$(E_1, E_2) = (\mathbb{C}/\mathfrak{a}, \mathbb{C}/\mathfrak{an}(s)^{-1}),$$

où \mathfrak{a} est un idéal de l'anneau des entiers \mathcal{O}_d de \mathbb{K}_d .

Notons $P_d = \Phi_{N,E}((E_1, E_2))$. Ce point ne dépend que de la classe de \mathfrak{a} dans le groupe de classes de \mathbb{K}_d (une fois E et d fixés). Notons également $\text{Tr}_d = \text{Tr}_{\mathbb{H}_d|\mathbb{K}_d}(P_d)$. Les points de Heegner sont définis sur $E(\mathbb{H}_d)$ et sont permutés par G_d ([Gr]).

Si R est un corps de nombres alors $\widehat{h}_R(P)$ désigne la hauteur de Néron-Tate prise sur R du point P à coordonnées dans R . Ainsi, si $\widehat{h}(P)$ est la hauteur canonique de Néron-Tate comme définie dans [Si], VIII.9 du point P à coordonnées dans R alors $\widehat{h}(P) = [R : \mathbb{Q}]^{-1} \widehat{h}_R(P)$ de sorte que si S est une extension de degré fini de R alors $\widehat{h}_S(P) = [S : R] \widehat{h}_R(P)$. Le but de cet article est d'étudier la valeur en moyenne, sur les d dans \mathcal{D} des deux objets suivants :

- $\widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d)$, hauteur de Néron-Tate sur \mathbb{H}_d d'un quelconque des h_d points de Heegner définis ci-dessus. Puisque $\widehat{h}_{\mathbb{H}_d}$ est invariante sous l'action de G_d , cette hauteur est indépendante du point choisi,
- $\widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\text{Tr}_d)$, hauteur de Néron-Tate de la trace sur \mathbb{K}_d d'un quelconque des points de Heegner P_d définis ci-dessus.

B.H. Gross et D. Zagier ([GrZa]) ont relié $\widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d)$ à la valeur de la dérivée en 1 de la série de Dirichlet obtenue en effectuant le produit de la fonction L de Dirichlet associée au caractère primitif réel $\chi_d(m) := \left(\frac{d}{m} \right)$ de conducteur $|d|$ du corps

\mathbb{K}_d (le caractère de Kronecker du corps) par la convolution de Rankin-Selberg de $L(E|\mathbb{Q}, s) := \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ avec la fonction zeta $\sum_{n \geq 1} r_d(n) n^{-s}$ de la classe des idéaux principaux de \mathbb{K}_d c'est-à-dire

$$(2.2) \quad L_d(E, s) := \left(\sum_{\substack{m \geq 1 \\ (m, N)=1}} \frac{\chi_d(m)}{m^{2s-1}} \right) \times \left(\sum_{n \geq 1} \frac{a_n r_d(n)}{n^s} \right),$$

où $r_d(n)$ désigne le nombre d'idéaux principaux de \mathbb{K}_d de norme n pour tout entier naturel non-nul n .

Théorème 2.1 (B.H. Gross-D. Zagier (1986)). *Si E est une courbe elliptique définie sur \mathbb{Q} et d est dans \mathcal{D} alors*

$$(2.3) \quad L'_d(E, 1) = \frac{2\Omega_{E,N}}{u^2 \sqrt{-d}} \widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d),$$

$$(2.4) \quad L'(E|\mathbb{K}_d, 1) = \frac{2\Omega_{E,N}}{u^2 \sqrt{-d}} \widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\text{Tr}_d)$$

où $L(E|\mathbb{K}_d, s)$ est la fonction L de E sur le corps \mathbb{K}_d , $2u$ est le nombre de racines de l'unité de \mathbb{K}_d et $\Omega_{E,N} = \text{Im}(\omega_1 \bar{\omega}_2)$ est le volume complexe de E (c'est-à-dire le double de l'aire d'un parallélogramme fondamental de $E(\mathbb{C})$).

Remarque 2.1. Plus précisément, l'équation (2.3) est le Théorème 6.1 de la section I de [GrZa] alors que l'équation (2.4) est le Théorème 2.1 de la section V.2 de [GrZa].

Nous rappelons finalement la relation évidente

$$\widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\text{Tr}_d) = \widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d) + \sum_{\sigma \in G_d \setminus \{Id\}} \langle P_d, P_d^\sigma \rangle_{\mathbb{H}_d}$$

entre nos deux objets d'étude. Ici, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}_d}$ désigne la forme bilinéaire de Néron-Tate sur \mathbb{H}_d . Le troisième terme fait intervenir l'angle formé par les points de Heegner entre eux et il sera intéressant de l'analyser (voir paragraphe 5).

3. LES TRACES

3.1. Mise en place. Il est ici nécessaire de raisonner selon le rang de la courbe E . La fonction L de E sur \mathbb{Q} précédemment notée $L(E|\mathbb{Q}, s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ est définie a priori sur $\Re(s) > \frac{3}{2}$. Selon les travaux de A. Wiles et de R. Taylor ([Wi] et [TaWi]), il existe une forme primitive cuspidale f de niveau N , de poids 2 et de caractère trivial telle que

$$L(E|\mathbb{Q}, s) = L(f, s)$$

sur $\Re(s) > \frac{3}{2}$. Ainsi, les travaux de E. Hecke (Théorème 14.7 de [IwKo]) assurent que $L(E|\mathbb{Q}, s)$ admet un prolongement holomorphe à \mathbb{C} et satisfait l'équation fonctionnelle

$$\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi} \right)^s \Gamma(s) L(E|\mathbb{Q}, s) = \omega \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi} \right)^{2-s} \Gamma(2-s) L(E|\mathbb{Q}, 2-s)$$

où $-\omega = \pm 1$ est la valeur propre de l'involution de Fricke de f définie par

$$f\left(-\frac{1}{qz}\right) = -\omega qz^2 f(z)$$

pour tout nombre complexe z de partie imaginaire strictement positive. Définissons pour tout discriminant d dans \mathcal{D} la fonction L de E sur \mathbb{Q} tordue par χ_d sur $\Re(s) > \frac{3}{2}$ par

$$L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s) := \sum_{n \geq 1} \frac{a_n \chi_d(n)}{n^s}.$$

La fonction $L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s)$ admet un prolongement holomorphe à \mathbb{C} et satisfait l'équation fonctionnelle

$$\left(\frac{|d|\sqrt{N}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s) = \omega_d \left(\frac{|d|\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{2-s} \Gamma(2-s) L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 2-s)$$

où $\omega_d := \omega_{\chi_d(-N)} = -\omega$ (Proposition 14.20 de [IwKo]). Avec ces notations, la factorisation

$$(3.1) \quad L(E|\mathbb{K}_d, s) = L(E|\mathbb{Q}, s) L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s)$$

est valide (équation 0.4 de la section IV. de [GrZa]) d'où

$$L'(E|\mathbb{K}_d, 1) = L'(E|\mathbb{Q}, 1) L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) + L(E|\mathbb{Q}, 1) L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1).$$

Ainsi, l'étude de la hauteur des traces des points de Heegner en moyenne sur les discriminants d dans \mathcal{D} est ramenée à l'étude de la valeur au point critique des fonctions L tordues lorsque E est de rang analytique 1 et à l'étude des dérivées au point critique des fonctions L tordues lorsque E est de rang analytique 0 car alors $\omega = +1$. Mentionnons que le rang analytique de E est l'ordre d'annulation de $L(E|\mathbb{Q}, s)$ au point critique $s = 1$.

3.2. Courbes de rang analytique 0. Rappelons le théorème obtenu par H. Iwaniec dans [Iw]. Avant cela, fixons une fois pour toutes les deux notations

$$(3.2) \quad \gamma(4N) := \#\{k^2 \in \mathbb{Z}/4N\mathbb{Z}, (k, 4N) = 1\},$$

et

$$(3.3) \quad c_N := \frac{3\gamma(4N)}{\pi^2 N} \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|2N}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1}$$

où \mathcal{P} désigne l'ensemble des nombres premiers.

Théorème 3.1. *Si E une courbe elliptique rationnelle de conducteur N sans facteurs carrés et de rang analytique 0 et F est une fonction lisse à support compact dans \mathbb{R}_+ et de moyenne strictement positive, alors*

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) F\left(\frac{|d|}{Y}\right) = \alpha_N Y \log Y + \beta_N Y + \mathcal{O}_\varepsilon\left(N^{\frac{23}{14} + \varepsilon} Y^{\frac{13}{14} + \varepsilon}\right),$$

pour tout $\varepsilon > 0$ où

$$(3.4) \quad \alpha_N := c_N L(1) \int_0^{+\infty} F(t) dt \neq 0,$$

et

$$\beta_N := c_N \int_0^{+\infty} F(t) \left(L'(1) + L(1) \left(\log \left(\frac{\sqrt{N}t}{2\pi} \right) - \gamma \right) \right) dt,$$

avec

$$L(s) := \frac{L(\text{Sym}^2 E, 2s)}{\zeta^{(N)}(4s-2)} \left(\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|N}} \left(1 - \frac{a_p}{p^s} \right)^{-1} \left(1 - \frac{a_{p^2}}{p^{2s}} \right) \right) \mathcal{P}(s),$$

et

$$(3.5) \quad \mathcal{P}(s) := \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \nmid 2N}} \left(\frac{1}{1+1/p} + \left(\frac{1}{1+p} \right) \left(\frac{1+p^{2-4s} - (a_p^2 - 2p)p^{-2s}}{1+p^{1-2s}} \right) \right).$$

Remarque 3.1. Dans [Iw], la fonction L est définie par la série de Dirichlet suivante

$$L(s) = \sum_{\substack{n=k\ell^2 \\ k|N^\infty \\ (\ell, N)=1}} \frac{b_n}{n^s},$$

avec

$$b_n := a_n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|n \\ p \nmid 2N}} \left(1 + \frac{1}{p} \right)^{-1}$$

pour tout entier naturel non-nul n . Celle-ci peut se réécrire sous la forme

$$L(s) = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|N}} \left(1 - \frac{a_p}{p^s} \right)^{-1} \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \nmid 2N}} \left(1 + \left(1 + \frac{1}{p} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{p^{2i}}}{p^{2is}} \right) \right) \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|(2, N-1)}} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{p^{2i}}}{p^{2is}} \right)$$

ce qui permet de retrouver l'expression de L donnée dans le théorème en fonction du carré symétrique de E et du produit Eulerien \mathcal{P} . Signalons que l'holomorphicité de la fonction $L(\text{Sym}^2 E, s)$ dans tout le plan complexe a été prouvée par Shimura dans [Sh] et que le produit Eulerien $\mathcal{P}(s)$ est absolument convergent sur $\Re(s) > \frac{3}{4}$ et y définit une fonction holomorphe.

Remarque 3.2. La valeur de la fonction $L(\text{Sym}^2 E, s)$ au bord de la bande critique est reliée au degré de la paramétrisation modulaire $\Phi_{N,E} : X_0(N) \rightarrow E$ de E (cf. [Wa] (1-1)) par la formule suivante analogue à celle du nombre de classes de Dirichlet

$$\frac{L(\text{Sym}^2 E, 2)}{\pi \Omega_{E,N}} = \frac{\deg(\Phi_{N,E})}{N c_E(N)^2}$$

où $c_E(N)$ est la $\Gamma_0(N)$ -constante de Manin de E qui est un entier relatif uniformément borné ([Ed]). Ici, on utilise le fait que N est sans facteurs carrés à deux reprises :

- les fonctions L du carré symétrique de E motivique et analytique coïncident car les termes correctifs apparaissent seulement en les nombres premiers dont le carré divise le conducteur N ,
- lorsque E est une courbe de Weil $X_0(N)$ -forte et N est impair, la constante de Manin vaut ± 1 selon les travaux de A. Abbes et E. Ullmo ([AbUl]) alors que J. Manin ([Ma]) a conjecturé que cette constante vaut ± 1 pour toute courbe de Weil $X_0(N)$ -forte.

Remarque 3.3. Il semblerait que quelques petites erreurs de frappe dans la formule pour α_N (et en fait pour c_N et L) se soient glissées dans [Iw]. La valeur donnée ici est corrigée.

Remarque 3.4. Dans [Iw], la dépendance en le conducteur N de la courbe dans le terme d'erreur n'est pas explicite. Cependant, il suffit de reprendre les différentes majorations pour restituer celle-ci.

Corollaire 3.2. *Si E est une courbe elliptique rationnelle de conducteur N sans facteurs carrés et de rang analytique 0 alors*

$$(3.6) \quad \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} \widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\mathrm{Tr}_d) = C_{\mathrm{Tr}}^{(0)} Y^{\frac{3}{2}} \log Y + \frac{C_{\mathrm{Tr}}^{(0)}}{2} \log(N) Y^{\frac{3}{2}} \\ + \frac{L(E|\mathbb{Q}, 1) c_N}{3\Omega_{E,N}} \left(L'(1) - L(1) \left(\frac{2}{3} + \log(2\pi) + \gamma \right) \right) Y^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}_\varepsilon \left(\frac{L(E|\mathbb{Q}, 1)}{\Omega_{E,N}} N^{\frac{23}{14} + \varepsilon} Y^{\frac{20}{14} + \varepsilon} \right),$$

pour tout $\varepsilon > 0$, où $C_{\mathrm{Tr}}^{(0)}$ est la constante définie par

$$C_{\mathrm{Tr}}^{(0)} := \frac{2}{\pi} c_N \mathcal{P}(1) L(E|\mathbb{Q}, 1) \frac{L(\mathrm{Sym}^2 E, 2)}{\pi \Omega_{E,N}} L_E$$

en notant L_E un produit de facteurs locaux correspondant aux facteurs Euleriens de $L(E|\mathbb{Q}, s)$ et de $L(\mathrm{Sym}^2(E), s)$ en les nombres premiers divisant le conducteur

$$(3.7) \quad L_E := \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|N}} \left(1 - \frac{a_p}{p} \right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-1} \left(1 - \frac{a_{p^2}}{p^2} \right).$$

Preuve du corollaire 3.2. Il suffit d'appliquer la formule de Gross-Zagier (2.4) et de prendre pour F une approximation lisse de la fonction qui vaut $\frac{3}{2}\sqrt{t}$ sur $[0, 1]$ et 0 en dehors de cet intervalle. Le corollaire découle alors de (3.1). ■

Remarque 3.5. À conducteur N fixé, le terme principal dans (3.6) est $C_{\mathrm{Tr}}^{(0)} Y^{\frac{3}{2}} \log Y$ avec

$$C_{\mathrm{Tr}}^{(0)} = \left(\frac{6}{\pi^3 c_E(N)^2} \mathcal{P}(1) \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|2N}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-1} \right) \times L(E|\mathbb{Q}, 1) L_E \times \frac{\gamma(4N)}{N^2} \deg(\Phi_{N,E})$$

et est donc proportionnel au degré de la paramétrisation modulaire. Par contre, si $N = Y^a$ avec $0 < a < \frac{1}{23}$ alors le deuxième terme de (3.6) est du même ordre de grandeur que le premier et le terme principal devient

$$\left(1 + \frac{a}{2}\right) C_{\text{Tr}}^{(0)} Y^{\frac{3}{2}} \log Y.$$

C'est la principale raison pour laquelle nous avons rendu explicite la dépendance en le conducteur N de la courbe dans le terme d'erreur. Il serait aussi intéressant d'étudier l'influence des valeurs extrémales de $L(E|\mathbb{Q}, 1)$ sur la moyenne des hauteurs des traces des points de Heegner. Malheureusement, cela ne semble pas vérifiable numériquement étant donné le temps de calcul nécessaire par les algorithmes à utiliser.

Le produit Eulerien $\mathcal{P}(s)$ varie peu. En effet, si l'on effectue un développement limité du facteur local en le nombre premier p de $\mathcal{P}(1)$, on obtient

$$\mathcal{P}_p(1) = 1 - \frac{a_p^2 - 2p}{p^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

d'où l'existence d'une constante absolue $C > 0$ ne dépendant pas de la courbe E considérée telle que

$$C \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{2}{p^2}\right) < \mathcal{P}(1) < C \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{2}{p^2}\right)$$

Finalement, les termes importants sont le degré de la paramétrisation modulaire, la valeur de la fonction L de la courbe au point critique 1 ainsi que le conducteur qui intervient en $\gamma(4N)/N^2$. À conducteur et degré fixés, les petits nombres premiers qui divisent le conducteur ont un rôle décisif et les hauteurs des traces ont alors tendance à être plus ou moins grandes suivant que E a réduction *multiplicative déployée* ou *non-déployée* en ces nombres premiers. Cette influence se voit très bien dans le cas des deux courbes de conducteur 26 (de rang analytique 0) dont les paramétrisations modulaires ont même degré 2 alors que les traces sont presque trois fois plus grosses sur la 26B que sur la 26A. Ceci s'explique analytiquement par le fait que 26 est divisible par 2 et que la 26A a réduction multiplicative déployée en 2 alors que la 26B a réduction multiplicative non-déployée. Ceci induit un facteur 3 entre les produits pour les nombres premiers p divisant le conducteur de ces courbes des facteurs Euleriens de leur fonction L en p . La figure 2 illustre cette différence de comportement. On voit également que la courbe représentant la somme des hauteurs des traces est très proche de la courbe théorique même si elle est relativement irrégulière. Rappelons que 0.0018 et 0.0050 sont les valeurs numériques de la constante $C_{\text{Tr}}^{(0)}$ apparaissant dans le corollaire 3.2 pour les courbes 26A et 26B.

3.3. Courbes de rang analytique 1. Lorsque l'on considère une courbe de rang 1, on est amené à estimer la moyenne des valeurs en 1 des fonctions L tordues et non de leurs dérivées.

Théorème 3.3. *Si E est une courbe elliptique rationnelle de conducteur N sans facteurs carrés et de rang analytique 1 et F est une fonction lisse à support compact*

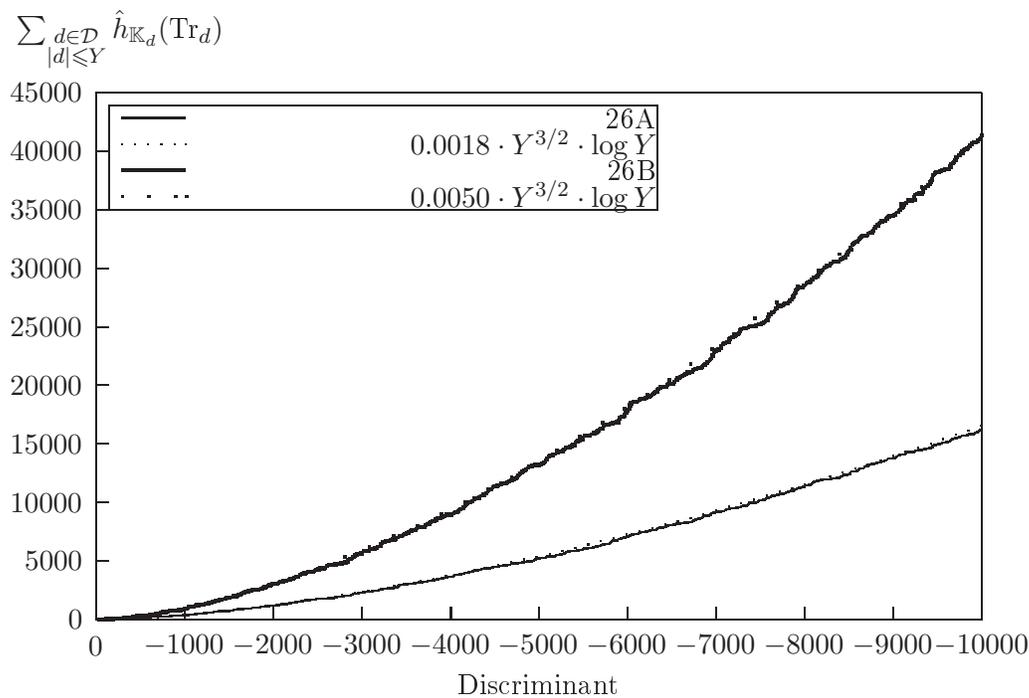


FIG. 2. Hauteur des traces en moyenne sur les courbes 26A et 26B : pratiques et théoriques.

dans \mathbb{R}_+ et de moyenne strictement positive alors

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) F\left(\frac{|d|}{Y}\right) = \alpha_N Y + \mathcal{O}_\varepsilon\left(N^{\frac{23}{14} + \varepsilon} Y^{\frac{13}{14} + \varepsilon}\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$ où α_N est définie en (3.4).

Idée de preuve du théorème 3.3. Il n'est pas difficile d'adapter la démonstration de [Iw] à ce cas. En reprenant les notations de l'article, il suffit de remplacer la fonction $V(X)$ définie au paragraphe 4 page 369 par la fonction

$$\tilde{V}(X) = e^{-X}.$$

On a alors²,

$$\mathcal{A}(X, \chi_d) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re(s)=3/4} L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s+1) \Gamma(s) \left(\frac{X}{2\pi}\right)^s ds.$$

La majoration $\mathcal{A}(X, \chi_d) \ll \sqrt{X}$, qui découle de l'inégalité de Hölder et d'une estimation des a_n tient toujours, et ainsi les majorations successives effectuées dans la démonstration ne posent pas de problème. La seule différence notable vient à la page

²A noter une erreur de frappe dans [Iw], il s'agit bien de $\left(\frac{X}{2\pi}\right)^s$ et non de son inverse.

374 lors du calcul de $\mathcal{B}(X)$. On a alors

$$\text{Res}_{s=0} L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s+1) \Gamma(s) \left(\frac{X}{2\pi} \right)^s = L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1)$$

et il n'apparaît pas de terme en $\log X$. ■

On en déduit comme pour le rang 0 le corollaire suivant.

Corollaire 3.4. *Si E est une courbe elliptique rationnelle de conducteur N sans facteurs carrés et de rang analytique 1 alors*

$$(3.8) \quad \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} \widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\text{Tr}_d) = C_{\text{Tr}}^{(1)} Y^{3/2} + \mathcal{O}_\varepsilon \left(\frac{L(E|\mathbb{Q}, 1)}{\Omega_{E,N}} N^{\frac{23}{14} + \varepsilon} Y^{\frac{20}{14} + \varepsilon} \right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$ où $C_{\text{Tr}}^{(1)}$ est la constante définie par

$$C_{\text{Tr}}^{(1)} := \frac{2}{\pi} c_N \mathcal{P}(1) L'(E|\mathbb{Q}, 1) \frac{L(\text{Sym}^2 E, 2)}{\pi \Omega_{E,N}} L_E$$

où c_N est définie en (3.3), L_E en (3.7) et \mathcal{P} en (3.5).

Remarque 3.6. À conducteur N fixé, le terme principal dans (3.8) est $C_{\text{Tr}}^{(1)} Y^{\frac{3}{2}}$ avec

$$C_{\text{Tr}}^{(1)} = \left(\frac{6}{\pi^3 c_E(N)^2} \mathcal{P}(1) \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|2N}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-1} \right) \times L'(E|\mathbb{Q}, 1) L_E \times \frac{\gamma(4N)}{N^2} \deg(\Phi_{N,E})$$

et est donc proportionnel au degré de la paramétrisation modulaire.

Remarque 3.7. Il est intuitivement étonnant que les traces en moyenne des points de Heegner sur une courbe elliptique E soient asymptotiquement plus grosses par un facteur logarithmique si le rang de la courbe elliptique est minimal. Donnons une tentative d'explication de ce phénomène. Si E est de rang 1 alors Tr_d appartient à $E(\mathbb{Q})$ et il existe un entier naturel ℓ_d appelé *multiplicité* de Tr_d satisfaisant

$$\text{Tr}_d = \ell_d R + T_d$$

où R est un générateur de la partie libre de $E(\mathbb{Q})$ et T_d est un élément de $E(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$. Ainsi,

$$\widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\text{Tr}_d) = \ell_d^2 \times 2\widehat{h}_{\mathbb{Q}}(R).$$

L'ensemble des hauteurs des traces est donc inclus dans un sous-ensemble discret de \mathbb{R} ce qui constitue une contrainte forte sur la distribution de la hauteur de ces traces. Notons aussi que le corollaire 3.4 nous informe que la taille moyenne de la multiplicité ℓ_d est $|d|^{1/4}$.

Les deux courbes elliptiques de conducteur 91 ont même rang 1 et on a représenté sur la figure 3 les hauteurs des traces Tr_d sur ces deux courbes ainsi que la courbe théorique donnée par le corollaire ci-dessus. On constate que les courbes sont beaucoup plus irrégulières que dans le cas du rang 0 (figure 2) même si elles suivent la

courbe théorique de très près. La figure 4 illustre les différences de croissance des hauteurs des traces sur les courbes 37A (rang 1) et 37B (rang 0). On remarque que le comportement est très irrégulier. Ceci est en partie dû à la division par $Y^{3/2}$ qui rend les irrégularités plus apparentes que dans la figure 2. De plus, pour la courbe 37A de rang 1, il arrive fréquemment que la trace soit nulle, ce qui «casse la moyenne». Il est conjecturé que la proportion d'annulation de $L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1)$ (ce qui correspond aux cas de trace nulle selon la formule de Gross-Zagier et la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer) tend vers 0 lorsque le discriminant tend vers l'infini³ mais cela ne se voit pas dans l'échelle de discriminants étudiée.

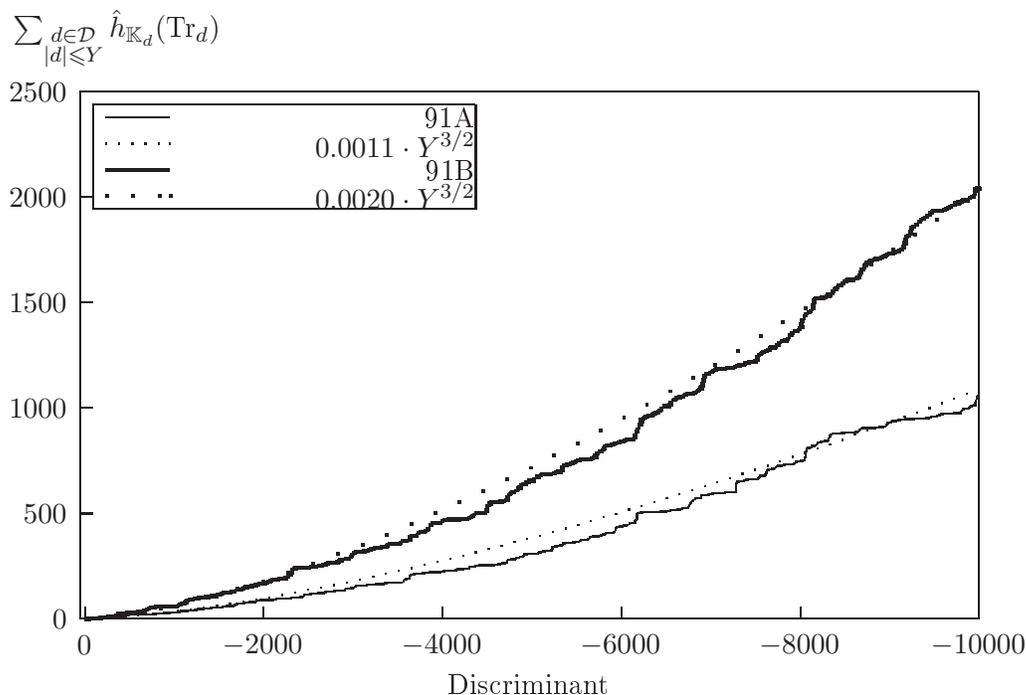


FIG. 3. Hauteur des traces en moyenne sur les courbes 91A et 91B.

4. ESTIMATION ASYMPTOTIQUE DE LA HAUTEUR DES POINTS DE HEEGNER

Nous démontrons une formule asymptotique pour les hauteurs des points de Heegner P_d semblable à celle que nous avons donnée pour les traces. Soient E une courbe elliptique définie sur \mathbb{Q} , de conducteur N et $L(E|\mathbb{Q}, s) := \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ sa fonction L (de rang analytique quelconque). On s'intéresse à la valeur moyenne des dérivées en 1 des séries de Dirichlet $L_d(E, s)$ définies par (2.2).

Théorème 4.1. *Si E est une courbe elliptique rationnelle de conducteur N sans facteurs carrés et de rang analytique quelconque et F est une fonction lisse à support*

³Le type de symétrie de cette famille de fonctions L est orthogonal impair.

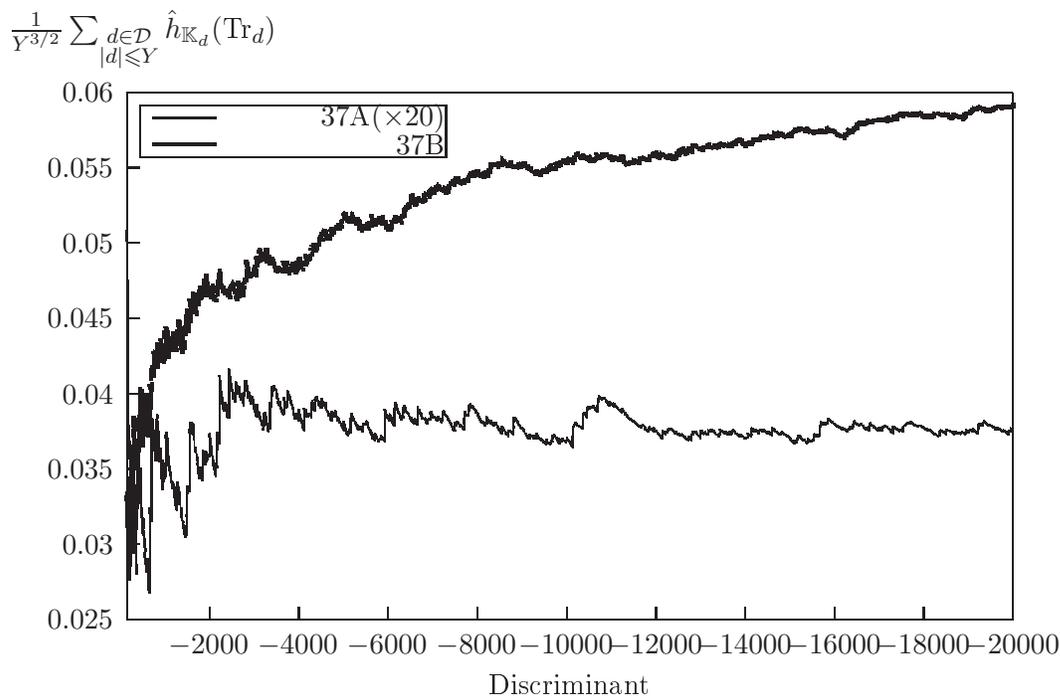


FIG. 4. Hauteur des traces en moyenne sur les courbes 37A et 37B.

compact dans \mathbb{R}_+ et de moyenne strictement positive alors

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} L'_d(E, 1) F\left(\frac{|d|}{Y}\right) = \tilde{\alpha}_N Y \log Y + \tilde{\beta}_N Y + \text{Error} + \mathcal{O}_\varepsilon\left(N^{\frac{15}{4} + \varepsilon} Y^{\frac{19}{20} + \varepsilon}\right)$$

où

$$(4.1) \quad \text{Error} = \mathcal{O}_\varepsilon\left(NY (\log(NY))^{\frac{1}{2} + \varepsilon}\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et où

$$\tilde{\alpha}_N := c_N \tilde{L}(1) \int_0^{+\infty} F(t) dt \neq 0$$

et

$$\tilde{\beta}_N := c_N \int_0^{+\infty} F(t) \left(\tilde{L}'(1) + \tilde{L}(1) \left(\log\left(\frac{Nt}{4\pi^2}\right) - 2\gamma \right) \right) dt$$

où la constante c_N est définie en (3.3) avec

$$\tilde{L}(s) := \frac{L(\text{Sym}^2 E, 2s)}{\zeta^{(N)}(2s)} \tilde{\mathcal{P}}(s) \times \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si } N \text{ est impair,} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\tilde{\mathcal{P}}(s) := \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \nmid 2N}} \left(1 + \left(1 + \frac{1}{p} \right)^{-1} (p^{4s-2} - 1)^{-1} \right).$$

Remarque 4.1. À conducteur N fixé, il semble que l'on obtienne un développement asymptotique du premier moment par rapport à Y à un seul terme et non à deux termes comme dans le Théorème 3.1 de H. Iwaniec. Cependant, les résultats numériques décrits dans la dernière partie du paragraphe 5 et notre intuition analytique nous permettent de conjecturer que

$$\text{Error} = o(NY).$$

Pour pouvoir prouver cela, il faudrait notamment être en mesure de déterminer le comportement asymptotique de moyennes de la forme

$$\sum_{\substack{1 \leq u \leq U \\ 1 \leq v \leq V}} \sum_{d \in \mathcal{D}} a_{u,v} \chi_d(u) r_d(v) F\left(\frac{|d|}{Y}\right)$$

pour tous nombres réels strictement positifs U, V et toute suite de nombres complexes $(a_{u,v})_{\substack{1 \leq u \leq U \\ 1 \leq v \leq V}}$ (lire également la discussion autour de l'équation (5.1)). Les auteurs projettent de s'intéresser dans un avenir proche à ce type de moyennes qui sont en réalité un cas particulier de quantités beaucoup plus générales. En outre, il ne fait aucun doute que la dépendance en N dans $\mathcal{O}_\varepsilon\left(N^{\frac{15}{4}+\varepsilon} Y^{\frac{19}{20}+\varepsilon}\right)$ peut être améliorée en étant plus soigneux mais une croissance au plus polynomiale en le conducteur nous suffit.

Preuve du théorème 4.1. B.H. Gross et D. Zagier (équation 0.2 de la section IV. de [GrZa]) ont prouvé que la série de Dirichlet $L_d(E, s)$ définie a priori sur $\Re(s) > \frac{3}{2}$ admet un prolongement holomorphe à \mathbb{C} et satisfait l'équation fonctionnelle

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Lambda_d(E, s) = -\chi_d(N) \Lambda_d(E, 2-s)$$

où $\Lambda_d(E, s) := (N|d|)^s ((2\pi)^{-s} \Gamma(s))^2 L_d(E, s)$ est la série de Dirichlet complétée. Remarquons que comme d est un carré modulo N , le signe de l'équation fonctionnelle vaut -1 d'où $L_d(E, 1) = 0$. Ceci va nous permettre d'exprimer $L'_d(E, 1)$ en fonction de deux sommes convergeant exponentiellement vite en suivant une procédure analytique désormais classique (cf Théorème 5.3. de [IwKo] pour plus de détails). Pour $X > 0$, posons

$$V(X) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re(s)=3/4} \Gamma(s)^2 X^{-s} ds,$$

et

$$\mathcal{A}_d(E, X) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re(s)=3/4} L_d(E, s+1) \Gamma(s)^2 \left(\frac{X}{4\pi^2}\right)^s ds.$$

Le développement de $L_d(E, s)$ en série de Dirichlet absolument convergente sur $\Re(s) > \frac{3}{2}$ assure que

$$\mathcal{A}_d(E, X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n r_d(n)}{n} \sum_{(m, N)=1} \chi_d(m) \frac{1}{m} V\left(\frac{4\pi^2 n m^2}{X}\right).$$

On déplace la ligne d'intégration jusqu'à $\Re(s) = -3/4$ croisant un unique pôle en $s = 0$ de résidu égal à $L'_d(E, 1)$ puis on revient en $s = 3/4$ par le changement de

variables $s \mapsto -s$. L'équation fonctionnelle entraîne alors que

$$L'_d(E, 1) = \mathcal{A}_d(E, X) + \mathcal{A}_d\left(E, \frac{(Nd)^2}{X}\right),$$

et en particulier que

$$L'_d(E, 1) = 2\mathcal{A}_d(E, |d|N).$$

Bornons $V(X)$ pour $X > 0$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{u=0}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} \int_{v=0}^{\infty} e^{-v} \left(\int_{(3/4)} \left(\frac{uv}{X}\right)^s \frac{1}{s} ds \right) dv du \\ &\ll \int_0^{\infty} \frac{e^{-(u+X/u)}}{u} du \\ (4.2) \quad &\ll X^{-1/4} \exp\left(-2\sqrt{X}\right) \end{aligned}$$

et en fait $X^j V^{(j)}(X) \ll_j X^{-1/4} \exp\left(-2\sqrt{X}\right)$ pour tout entier naturel j . Posons

$$S_N(Y) := \sum_{d \in \mathcal{D}} L'_d(E, 1) F\left(\frac{|d|}{Y}\right).$$

Comme d est dans \mathcal{D} , d est un carré modulo 4 et est premier à 4 donc d est congru à 1 modulo 4. Ainsi, $\mathcal{O}_d = \mathbb{Z} + \frac{1+\sqrt{d}}{2}\mathbb{Z}$ et un calcul élémentaire montre que

$$r_d(n) = \#\{(u, v) \in (\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}) \cup (\{0\} \times \mathbb{N}), u^2 + |d|v^2 = 4n\}.$$

On observe que si n est un carré alors $(2\sqrt{n}, 0)$ est une solution de l'équation ci-dessus alors qu'il n'existe pas de solutions de la forme $(0, *)$ ce qui prouve que

$$\begin{aligned} r_d(n) &= 1 + \#\{v \in \mathbb{Z}^*, |d|v^2 = 4n\} + \#\{(u, v) \in (\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^*), u^2 + |d|v^2 = 4n\} \\ &:= 1 + r'_d(n) \end{aligned}$$

et que

$$\sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ Y \ll |d| \ll Y}} r_d(n) \geq \#\{d \in \mathcal{D}, Y \ll |d| \ll Y\} \sim_{Y \rightarrow +\infty} CY$$

pour une constante absolue $C > 0$. Si n n'est pas un carré alors $r_d(n) = r'_d(n)$. Dans chacun des cas, si (u, v) est une solution contribuant à $r'_d(n)$ pour un d inférieur à Y dans \mathcal{D} alors $u \leq 2\sqrt{n}$ et à chaque tel u correspondent au plus deux couples (d, v) (car d est supposé sans facteurs carrés) d'où

$$(4.3) \quad \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \approx Y}} r'_d(n) \leq 4\sqrt{n}.$$

On écrit alors⁴ $S_N(Y) := \text{TP}_1 + \text{Err}_1$ où

$$\text{TP}_1 := 2 \sum_{n \geq 1} \frac{a_n^2}{n^2} \sum_{(m, N)=1} \frac{1}{m} \sum_{d \in \mathcal{D}} \chi_d(m) V\left(\frac{4\pi^2 n^2 m^2}{N|d|}\right) F\left(\frac{|d|}{Y}\right)$$

⁴Au cours de cette preuve, TP_i désignera la quantité d'où provient la contribution principale et Err_i un terme d'erreur.

et

$$(4.4) \quad \text{Err}_1 := 2 \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{n \geq 1} \frac{a_n r'_d(n)}{n} \sum_{(m, N)=1} \frac{1}{m} \chi_d(m) V \left(\frac{4\pi^2 n m^2}{N|d|} \right) F \left(\frac{|d|}{Y} \right).$$

Estimation du terme d'erreur Err_1 . Découpons Err_1 de la façon suivante :

$$(4.5) \quad \text{Err}_1 = 2 \sum_{(m, N)=1} \sum_{1 \leq n \leq \frac{NY\psi(NY)}{m^2}} \cdots + 2 \sum_{(m, N)=1} \sum_{n > \frac{NY\psi(NY)}{m^2}} \cdots := \text{Error} + \text{Err}_3$$

pour toute fonction ψ positive et tendant vers 0 en $+\infty$. Les estimations (4.2) et (4.3) assurent que

$$\text{Error} \ll (NY)^{1/4} \sum_{1 \leq m \leq \sqrt{NY\psi(NY)}} \frac{1}{m^{3/2}} \sum_{1 \leq n \leq \frac{NY\psi(NY)}{m^2}} \frac{|a_n|}{n^4} \exp \left(-4\pi \frac{m}{\sqrt{NY}} \sqrt{n} \right).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne que le carré de la somme en n est borné par

$$\left(\sum_{1 \leq n \leq \frac{NY\psi(NY)}{m^2}} \frac{a_n^2}{n^2} \right) \left(\sum_{1 \leq n \leq \frac{NY\psi(NY)}{m^2}} \sqrt{n} \exp \left(-8\pi \frac{m}{\sqrt{NY}} \sqrt{n} \right) \right).$$

La première somme est estimée par $\mathcal{O}(\log(NY\psi(NY)))$ alors que la deuxième est trivialement inférieure à

$$\int_1^{\frac{NY\psi(NY)}{m^2}} \sqrt{t} \exp \left(-8\pi \frac{m}{\sqrt{NY}} \sqrt{t} \right) dt \ll \left(\frac{NY\psi(NY)}{m^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ainsi, on a prouvé que $\text{Error} \ll NY(\psi(NY))^{\frac{3}{4}} (\log(NY\psi(NY)))^{\frac{1}{2}}$. De la même manière,

$$\text{Err}_3 \ll (NY)^{1/4} \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^{3/2}} \left(\sum_{n > \frac{NY\psi(NY)}{m^2}} \frac{a_n^2}{n^{2+\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n > \frac{NY\psi(NY)}{m^2}} n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \exp \left(-8\pi \frac{m}{\sqrt{NY}} \sqrt{n} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Une intégration par parties assure que

$$\text{Err}_3 \ll (NY)^{1+\varepsilon} (\psi(NY))^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \exp \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\psi(NY)} \right)$$

et on choisit alors $\psi(x) := (\log x)^a$ avec $2\varepsilon < a < \frac{2}{3}$ de sorte que $\text{Err}_3 = o(\text{Error})$ et que $\text{Error} \ll (NY)(\log(NY))^{\frac{3a}{4}+\frac{1}{2}} = o((NY) \log(NY))$.

Contribution du terme principal TP_1 . Déterminons le comportement asymptotique de TP_1 en appliquant une méthode développée dans [Iw] :

- la condition d sans facteurs carrés est supprimée en introduisant $\sum_{a^2|d} \mu(a)$ puis la somme est coupée selon la taille des diviseurs a de d ($a \leq A$ et $a > A$) sachant que l'on revient à des discriminants sans facteurs carrés dans le cas des grands diviseurs ;

- pour tout entier $m = m_1 m_2^2$ avec $(m_1 m_2, N) = 1$ et m_1 sans facteurs carrés, remarquons que $\chi_d(m) = \chi_d(m_1)$ si $(m_2, d) = 1$ (et 0 sinon) puis que le développement de Fourier du caractère $d \mapsto \chi_d(m_1)$ en terme de caractères additifs de module m_1 s'écrit

$$\chi_d(m_1) = \frac{\overline{\varepsilon_{m_1}}}{\sqrt{m_1}} \sum_{0 \leq |r| < \frac{m_1}{2}} \chi_{Nr}(m_1) e\left(\frac{\overline{N}rd}{m_1}\right)$$

où \overline{N} est l'inverse de N modulo m_1 et ε_{m_1} est le signe de la somme de Gauss de $d \mapsto \chi_d(m_1)$.

La contribution principale provient alors du terme $r = 0$ pour lequel $\chi_0(m_1)$ vaut 0 si $m_1 > 1$ et 1 sinon. En résumé,

$$\text{TP}_1 = \text{TP}_2 + \text{Err}_4 + \text{Err}_5$$

où

$$\text{TP}_2 := 2 \sum_{n \geq 1} \frac{a_n^2}{n^2} \sum_{\substack{a \leq A \\ (a, 4N)=1}} \mu(a) \sum_{\substack{(m_2, aN)=1 \\ m_2 | aN}} \frac{1}{m_2} \sum_{q | m_2} \mu(q) \sum_{\substack{qd \in \mathcal{D}' \\ (d, m_2)=1}} V\left(\frac{4\pi^2 n^2 m_2^4}{N a^2 |d|q}\right) F\left(\frac{a^2 |d|q}{Y}\right),$$

$$\text{Err}_5 := 2 \sum_{n \geq 1} \frac{a_n^2}{n^2} \sum_{(b, 4N)=1} \sum_{\substack{a|b \\ a > A}} \mu(a) \sum_{\substack{(m, N)=1 \\ m | aN}} \frac{1}{m} \sum_{d \in \mathcal{D}} \chi_{b^2 d}(m) V\left(\frac{4\pi^2 n^2 m^2}{N b^2 |d|}\right) F\left(\frac{b^2 |d|}{Y}\right)$$

et

$$\begin{aligned} \text{Err}_4 := & 2 \sum_{n \geq 1} \frac{a_n^2}{n^2} \sum_{\substack{a \leq A \\ (a, 4N)=1}} \mu(a) \sum_{\substack{m = m_1 m_2^2 \\ (m, aN)=1}} \frac{\mu^2(m_1)}{m} \sum_{q | m_2} \mu(q) \sum_{\substack{qd \in \mathcal{D}' \\ (d, m_2)=1}} \\ & \frac{\overline{\varepsilon_{m_1}}}{\sqrt{m_1}} \sum_{1 \leq |r| < \frac{m_1}{2}} \chi_{Nr q}(m_1) e\left(\frac{\overline{N}rd}{m_1}\right) V\left(\frac{4\pi^2 n^2 m^2}{N a^2 |d|q}\right) F\left(\frac{a^2 |d|q}{Y}\right) \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{D}' := \{d \in \mathbb{Z}_-, d \equiv \nu^2 \pmod{4N}, (\nu, 4N) = 1\}.$$

Estimation du terme d'erreur Err_5 . Pour commencer, l'inégalité de Hölder implique que

$$\text{Err}_5 \ll \sum_{n \ll (NY)^{\frac{1}{2}}} \frac{|a_n^2|}{n^2} \sum_{\substack{b \geq 1 \\ a|b \\ a > A}} \left(\sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \ll \frac{Y}{b^2}}} 1 \right)^{\frac{3}{4}} \left(\sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \ll \frac{Y}{b^2}}} \chi_{b^2 d}(m) \left| \sum_{m \ll \left(\frac{NY}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{m} \right|^4 \right)^{\frac{1}{4}}$$

d'où trivialement

$$\text{Err}_5 \ll Y^{\frac{3}{4}} \sum_{n \ll (NY)^{\frac{1}{2}}} \frac{|a_n^2|}{n^2} \sum_{\substack{b \geq 1 \\ a|b \\ a > A}} \frac{1}{b^{\frac{3}{2}}} \left(\sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \ll \frac{Y}{b^2}}} \chi_{b^2 d}(m) \left| \sum_{m \ll \left(\frac{NY}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{m} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'inégalité du grand crible ([Bo]) pour les caractères réels assure alors que

$$\text{Err}_5 \ll_\varepsilon \frac{Y^{\frac{5}{4}+\varepsilon}}{A^{\frac{3}{2}}} + \frac{N^{\frac{1}{4}+\varepsilon}Y^{1+\varepsilon}}{A^{\frac{1}{2}}}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Estimation du terme d'erreur Err_4 . Posons $\Delta := \inf\left(\frac{1}{2}, \frac{a^2q}{Y^{1-\varepsilon}}\right)$ pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ et découpons Err_4 selon que la sommation en r est restreinte par

$$\begin{aligned} 1 \leq |r| < \Delta m_1 &\rightsquigarrow \text{Err}_6, \\ \Delta m_1 \leq |r| < \frac{m_1}{2} &\rightsquigarrow \text{Err}_7. \end{aligned}$$

On estime Err_7 en bornant la somme sur les discriminants grâce au lemme 2 page 372 de [Iw] puis trivialement la somme en n et m ce qui entraîne que

$$\text{Err}_7 \ll_\varepsilon \gamma(4N)Y^\varepsilon N^{\frac{5}{4}+\varepsilon} \frac{\inf(A, Y^{\frac{1-\varepsilon}{2}})}{Y^{\varepsilon-\frac{1}{4}}} + \gamma(4N)Y^\varepsilon N^{\frac{5}{4}+\varepsilon} \frac{A^3}{Y^{\frac{3}{4}}}$$

où $\gamma(4N)$ est le cardinal de l'ensemble des classes d'équivalence de \mathcal{D}' modulo $4N$. On estime Err_6 de façon triviale par

$$\text{Err}_6 \ll_\varepsilon N^{\frac{3}{8}+\varepsilon} Y^{\frac{1}{2}+\varepsilon} A^{\frac{3}{2}}.$$

Contribution du terme principal TP_2 . Intéressons-nous au terme principal TP_2 et plus précisément à la somme sur les discriminants intervenant dans cette somme. Pour cela, on note $\mathcal{D}'(4N)$ l'ensemble des classes d'équivalence de \mathcal{D}' modulo $4N$ et on se souvient que $\#\mathcal{D}'(4N) = \gamma(4N)$. La formule de Poisson assure que

$$\begin{aligned} \sum_{qd \in \mathcal{D}'} V\left(\frac{4\pi^2 n^2 m_2^4}{Na^2 |d|q}\right) F\left(\frac{a^2 |d|q}{Y}\right) &= \frac{Y}{4Na^2q} \sum_{[d_0] \in \mathcal{D}'(4N)} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \\ &\int_{\mathbb{R}} V\left(\frac{4\pi^2 n^2 m_2^4}{NY \left|\frac{a^2 q d_0}{Y} + t\right|}\right) F\left(\left|\frac{a^2 q d_0}{Y} + t\right|\right) e\left(\frac{Y\ell}{4Na^2q}t\right) dt. \end{aligned}$$

On isole alors le terme $\ell = 0$ et on effectue deux intégrations par parties pour chaque terme $\ell \neq 0$ afin de rendre absolument convergente la série en ℓ (il ne reste pas de termes entre crochets car F est à support compact). On obtient alors

$$\begin{aligned} \text{TP}_2 &= \frac{\gamma(4N)Y}{2N} \int_0^{+\infty} F(t) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n^2}}{n^2} \sum_{\substack{a \leq A \\ (a, 4N)=1}} \frac{\mu(a)}{a^2} \sum_{(m_2, aN)=1} \frac{1}{m_2^2} \sum_{q|m_2} \frac{\mu(q)}{q} V\left(\frac{4\pi^2 n^2 m_2^4}{NYt}\right) \right) dt \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{N^{\frac{5}{4}}\gamma(4N)A^3}{Y^{\frac{3}{4}}}\right) \end{aligned}$$

Finalement,

$$\text{TP}_2 = c_N Y \int_0^{+\infty} F(t) \mathcal{B}(NYt) dt + \mathcal{O}\left(\frac{N^{\frac{1}{4}}\gamma(4N)Y^{\frac{5}{4}}}{A} + \frac{N^{\frac{5}{4}}\gamma(4N)A^3}{Y^{\frac{3}{4}}}\right)$$

avec

$$\mathcal{B}(X) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n^2}}{n^2} \sum_{(m,N)=1} \frac{b_{m^2}}{m^2} V\left(\frac{4\pi^2 n^2 m^4}{X}\right)$$

et

$$b_m = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|m \\ p \neq 2}} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

En revenant à la définition intégrale de la fonction V , on remarque que

$$\mathcal{B}(X) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(3/4)} \Gamma(s)^2 X^{-s} \tilde{L}(s+1) ds$$

et que le produit Eulerien intervenant dans la fonction \tilde{L} est absolument convergent sur $\Re(s) > \frac{3}{4}$ et y définit une fonction holomorphe. En décalant le contour jusqu'à $(-\frac{1}{4} + \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$, on ne croise qu'un pôle en $s = 0$ ce qui prouve que

$$\mathcal{B}(X) = -2(\gamma + \log(2\pi))\tilde{L}(1) + \tilde{L}'(1) + \tilde{L}(1) \log(X) + \mathcal{O}_\varepsilon\left(\left(\frac{N}{X}\right)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right).$$

Bilan et choix des paramètres. On a prouvé que

$$S_N(Y) = \tilde{\alpha}_N Y \log Y + \tilde{\beta}_N Y + \mathcal{O}_\varepsilon\left(NY (\log(NY))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) + \text{Err}$$

où

$$\text{Err} \ll_\varepsilon (NY)^\varepsilon \left(\frac{Y^{\frac{5}{4}}}{A^{\frac{3}{2}}} + \frac{N^{\frac{1}{4}} Y}{A^{\frac{1}{2}}} + \frac{N^{\frac{9}{4}} \inf(A, Y^{\frac{1-\varepsilon}{2}})}{Y^{\varepsilon-\frac{1}{4}}} + \frac{N^{\frac{9}{4}} A^3}{Y^{\frac{3}{4}}} + N^{\frac{3}{8}} Y^{\frac{1}{2}+\varepsilon} A^{\frac{3}{2}} + \frac{N^{\frac{5}{4}} Y^{\frac{5}{4}}}{A} \right)$$

et on choisit alors $A := N^{\frac{1}{2}} Y^{\frac{3}{10} - \frac{2\varepsilon}{5}}$ ce qui achève la preuve. ■

Appliquons finalement la formule de Gross-Zagier (2.3) pour obtenir une estimation asymptotique de la hauteur en moyenne des points de Heegner de la même forme que celle que l'on avait obtenue pour les traces.

Corollaire 4.2. *Si E est une courbe elliptique rationnelle de conducteur N sans facteurs carrés et de rang analytique quelconque alors*

$$\sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} \hat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d) = C_P Y^{\frac{3}{2}} \log Y + C'_P Y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3\Omega_{E,N}} \sqrt{Y} \text{Error} + \mathcal{O}_\varepsilon\left(N^{\frac{15}{4}+\varepsilon} Y^{\frac{29}{20}+\varepsilon}\right)$$

où

$$\frac{1}{3\Omega_{E,N}} \sqrt{Y} \text{Error} = \mathcal{O}_\varepsilon\left(NY^{\frac{3}{2}} (\log(NY))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et où C_P est la constante définie par

$$C_P := \frac{2}{\pi} c_N \mathcal{Q}(N) \frac{L(\text{Sym}^2 E, 2)}{\pi \Omega_{E,N}} \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|N}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1}$$

avec

$$\mathcal{Q}(N) := \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \nmid 2N}} \left(1 + \left(1 + \frac{1}{p} \right)^{-1} (p^2 - 1)^{-1} \right) \times \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si } N \text{ est impair,} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$C'_P := C_P \left(\log \left(\frac{N}{4\pi^2} \right) - \frac{2}{3} - 2\gamma \right) + \frac{c_N}{3\Omega_{E,N}} \tilde{L}'(1).$$

Remarque 4.2. En accord avec la remarque 4.1, on peut conjecturer que

$$\frac{1}{3\Omega_{E,N}} \sqrt{Y} \text{Error} = o_\varepsilon \left(NY^{\frac{3}{2}} \right)$$

et le corollaire précédent semble alors nous munir d'un développement asymptotique à deux termes de la hauteur en moyenne des points de Heegner.

Remarque 4.3. En remplaçant c_N et $L(\text{Sym}^2 E, 2)$ par leur expression on peut réécrire

$$C_P = \left(\left(\frac{8}{\pi^3 c_E(N)^2} \right) \mathcal{Q}(N) \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid N}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-2} \right) \frac{\gamma(4N)}{N^2} \text{deg}(\phi_{N,E}).$$

Ainsi, contrairement à la constante C_{Tr} intervenant lorsque l'on considère les traces, à conducteur fixé C_P ne dépend que du degré de la paramétrisation modulaire, puisque le produit $\mathcal{Q}(N)$ ne dépend que de N . Par contre, lorsque l'on varie le conducteur, il n'y a plus une dépendance directe sur le degré. Il est clair que $\mathcal{Q}(N) \geq 1$; d'autre part

$$\mathcal{Q}(N) < \frac{4}{3} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2} \right) < \frac{4}{3} \zeta(2).$$

Le produit Eulerien $\mathcal{Q}(N)$ est donc compris entre 1 et 2, et il joue un relativement faible rôle dans l'expression de C_P . On a ainsi

$$1 \leq \prod_{p \mid N} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-2} \mathcal{Q}(N) \leq \frac{4}{3} \zeta(2)^3 < 6.$$

Le terme principal, du moins si l'on s'intéresse à des valeurs asymptotiques du conducteur ou du degré de la paramétrisation modulaire, est donc $\frac{\gamma(4N)}{N^2} \text{deg}(\phi_{N,E})$. Comme $\gamma(4N) \ll N$, la conjecture du degré (2.1) nous procure une borne supérieure pour la croissance des hauteurs des points P_d lorsque N tend vers $+\infty$ avec Y . On sait d'autre part qu'il existe des familles de courbes de j -invariant borné ([De] page 50) pour lesquelles $\text{deg}(\Phi_{N,E}) \gg N^{\frac{7}{6}} \log N$ ce qui donne une borne inférieure sur la vitesse de croissance des hauteurs lorsque N tend vers $+\infty$ avec Y .

Remarque 4.4. Remarquons finalement que, même à conducteur fixé, la constante C'_P dépend de la courbe elliptique E et pas seulement du degré de la paramétrisation modulaire de E . Par contre, il ne semble pas être possible d'obtenir une estimation satisfaisante de la taille de C'_P par rapport au niveau.

5. ANALYSE DES RÉSULTATS THÉORIQUES ET NUMÉRIQUES

Après avoir donné quelques valeurs numériques des constantes en jeu, nous donnons des résultats expérimentaux illustrant les formules théoriques.

5.1. Quelques valeurs numériques.

5.1.1. *Valeurs numériques de C_{Tr} et de C_P .* Le tableau 1 regroupe les valeurs des trois constantes $C_{Tr}^{(0)}$, $C_{Tr}^{(1)}$ et C_P régissant le comportement en moyenne des hauteurs des points de Heegner et de leurs traces (selon les corollaires 3.2, 3.4 et 4.2) pour toutes les courbes elliptiques de conducteur sans facteurs carrés et inférieur à 100. Les valeurs de C_{Tr} et de C_P ont été multipliées par 10^3 pour une meilleure lisibilité. Le rapport entre la constante gouvernant le comportement des hauteurs des points

Courbe	Rang	$C_{Tr} \times 10^3$	$C_P \times 10^3$	C_P/C_{Tr}	Courbe	Rang	C_{Tr}	C_P	C_P/C_{Tr}
11 – 1	0	3.33	17.0	5.11	58 – 1	1	1.14	6.80	5.91
14 – 1	0	1.07	6.39	5.92	58 – 2	0	9.47	6.80	0.718
15 – 1	0	0.904	4.40	4.87	61 – 1	1	1.97	6.58	3.33
17 – 1	0	3.21	11.3	3.52	62 – 1	0	4.85	3.18	0.657
19 – 1	0	3.10	10.2	3.29	65 – 1	1	0.593	2.44	4.12
21 – 1	0	1.21	3.28	2.71	66 – 1	0	1.01	2.18	2.15
26 – 1	0	1.80	7.29	4.03	66 – 2	0	2.01	2.18	1.08
26 – 2	0	5.00	7.29	1.45	66 – 3	0	25.2	10.9	0.433
30 – 1	0	0.621	2.20	3.54	67 – 1	0	12.4	15.0	1.20
33 – 1	0	2.48	6.56	2.64	69 – 1	0	2.40	2.18	0.909
34 – 1	0	5.11	5.67	1.10	70 – 1	0	2.49	2.14	0.861
35 – 1	0	1.95	4.29	2.19	73 – 1	0	6.90	8.27	1.19
37 – 1	1	1.86	10.7	5.75	77 – 1	1	1.24	4.26	3.42
37 – 2	0	5.64	10.7	1.90	77 – 2	0	15.4	21.3	1.37
38 – 1	0	4.70	15.3	3.25	77 – 3	0	5.20	6.39	1.23
38 – 2	0	5.09	5.10	1.00	78 – 1	0	4.47	18.7	4.18
39 – 1	0	1.54	3.75	2.43	79 – 1	1	1.97	5.10	2.58
42 – 1	0	2.30	3.28	1.42	82 – 1	1	1.15	4.85	4.19
43 – 1	1	1.90	9.27	4.87	83 – 1	1	1.93	4.85	2.51
46 – 1	0	3.16	10.6	3.36	85 – 1	0	3.00	3.80	1.26
51 – 1	0	2.12	2.91	1.37	89 – 1	1	1.90	4.53	2.37
53 – 1	1	1.87	7.55	4.02	89 – 2	0	10.5	11.3	1.07
55 – 1	0	2.33	2.85	1.22	91 – 1	1	1.09	3.65	3.34
57 – 1	1	0.923	5.24	5.68	91 – 2	1	2.03	3.65	1.79
57 – 2	0	3.83	3.93	1.02	94 – 1	0	4.11	2.12	0.516
57 – 3	0	8.24	15.7	1.90					

TAB. 1. Valeurs numériques des constantes $C_{Tr}^{(0)}$, $C_{Tr}^{(1)}$ et C_P .

et celle donnant celui des traces donné dans la dernière colonne n'a que peu de sens dans le cas d'une courbe elliptique de rang 1 car les points y sont asymptotiquement

«plus gros» que les traces d'un facteur $\log Y$ selon les corollaires 3.4 et 4.2. Il est intéressant de voir que cette constante prend à la fois des valeurs plus grandes («les points sont plus gros») et plus petites («les traces sont plus grosses») que 1.

Remarque 5.1. Si l'on poursuit le calcul sur les 200 premières courbes elliptiques de conducteur sans facteurs carrés alors on obtient un rapport moyen de 1.5 environ et ce rapport tend à décroître. Il n'y a donc pas de raison a priori de croire qu'il soit plus souvent plus grand ou petit que 1.

5.1.2. *Étude plus fine du rapport $C_P/C_{Tr}^{(0)}$.* Pour étudier le rapport

$$\frac{C_P}{C_{Tr}^{(0)}} = \frac{\mathcal{Q}(N)}{\mathcal{P}(1)} L(E, 1)^{-1} \prod_{p|N} \left(1 - \frac{a_p}{p}\right) \left(1 - \frac{a_{p^2}}{p^2}\right)^{-1},$$

on néglige le rôle de $\frac{\mathcal{Q}(N)}{\mathcal{P}(1)}$, qui est de toute façon borné. Ainsi, la taille de

$$\gamma_E = L(E, 1)^{-1} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{a_p}{p}\right)^{-1}$$

par rapport à 1 reflète essentiellement le signe du terme

$$\sum_{\sigma \in G_d \setminus \{Id\}} \langle P, P^\sigma \rangle_{\mathbb{H}_d}.$$

Plus γ_E sera petit, plus ce produit scalaire sera grand, et, de manière imagée, on pourrait dire que les points de Heegner sont essentiellement resserrés autour d'une même direction; alors que si γ_E est grand devant 1, cette somme est négative et les points sont éclatés dans l'espace à h_d dimensions. On s'attend donc, par exemple, à ce que la hauteur des traces (en moyenne) soit supérieure à celle des points sur la courbe 58B ($\gamma_E = 0.67$), ce qui est illustré par la figure 5. Par contre, dans le cas de la courbe 37B ($\gamma_E = 1.34$), les points sont plus gros (figure 6).

5.2. Résultats expérimentaux. Nous avons effectué de nombreux calculs de points de Heegner et de leurs hauteurs sur différentes courbes, à l'aide des logiciels Magma et Pari. Magma a permis de calculer les points, ou les traces, eux-mêmes (suivant la méthode de calcul exposée dans [DaGr]), alors que Pari s'est avéré plus rapide pour le calcul direct de la série L intervenant dans la formule de Gross-Zagier. On s'est concentré sur des courbes de petits conducteurs ($N < 200$), car les algorithmes ont une complexité en $\mathcal{O}(N^2)$. Nous présentons ici certains des résultats obtenus, pour illustrer notre théorème.

5.2.1. *Comparaison entre les valeurs expérimentale et théorique de C_P .* Nous commençons par comparer les valeurs expérimentales de C_P à la valeur théorique donnée dans la section précédente. Ainsi, pour chaque courbe de conducteur sans facteurs carrés plus petit que 100, on a représenté le rapport entre la valeur expérimentale

$$C_P^{\text{exp}}(Y) := \frac{1}{Y^{3/2} \log Y} \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} \hat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d)$$

Somme des hauteurs

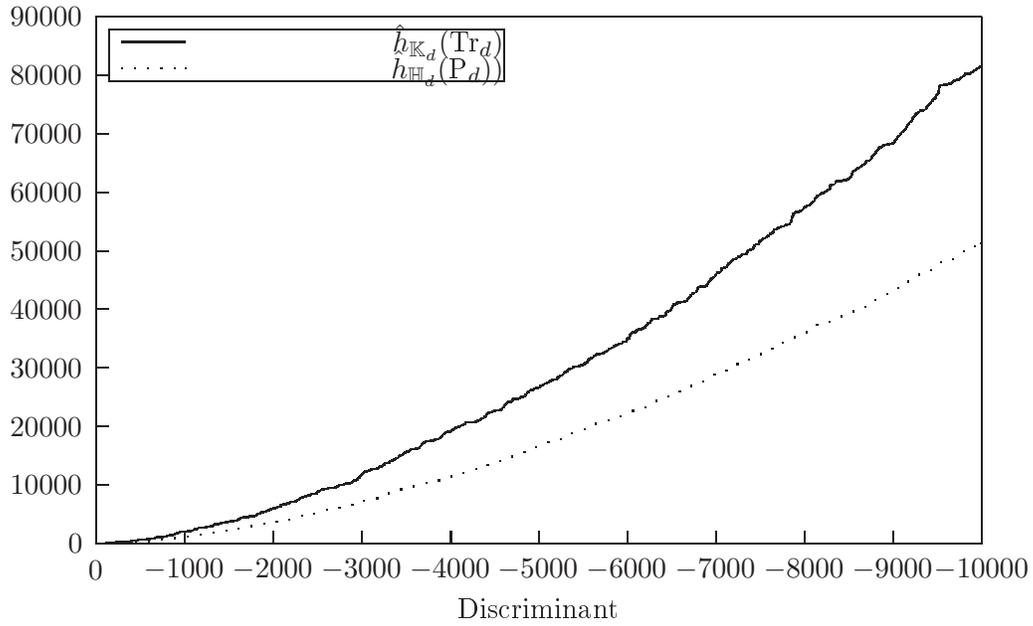


FIG. 5. Somme des hauteurs des traces et des points sur la courbe 58B.

Somme des hauteurs

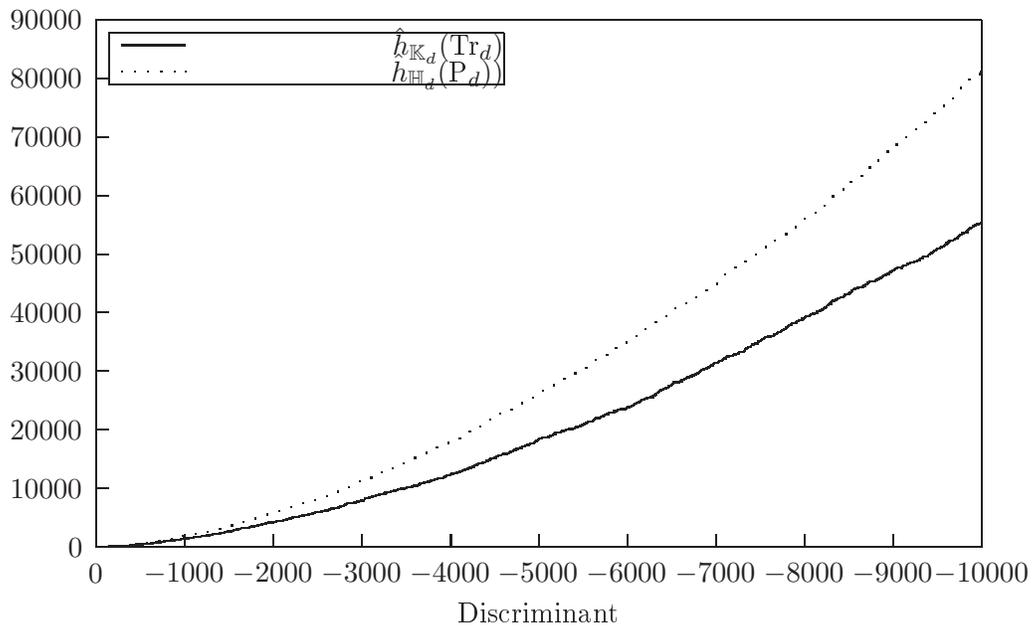


FIG. 6. Somme des hauteurs des traces et des points sur la courbe 37B.

pour quelques valeurs de Y et la valeur théorique dans le tableau 2. Ainsi, même

Courbe	6000	13000	20000	Courbe	6000	13000	20000	Courbe	6000	13000	20000
11 - 1	0.716	0.738	0.750	42 - 1	0.683	0.722	0.735	67 - 1	0.725	0.753	0.763
14 - 1	0.707	0.736	0.742	43 - 1	0.678	0.699	0.714	69 - 1	0.795	0.797	0.807
15 - 1	0.703	0.723	0.740	46 - 1	0.699	0.720	0.729	70 - 1	0.762	0.774	0.785
17 - 1	0.735	0.753	0.764	51 - 1	0.711	0.719	0.737	73 - 1	0.803	0.822	0.834
19 - 1	0.718	0.737	0.748	53 - 1	0.690	0.716	0.725	77 - 1	0.709	0.738	0.752
21 - 1	0.700	0.731	0.742	55 - 1	0.818	0.821	0.825	77 - 2	0.767	0.791	0.802
26 - 1	0.714	0.730	0.744	57 - 1	0.680	0.695	0.705	77 - 3	0.770	0.795	0.806
26 - 2	0.682	0.702	0.717	57 - 2	0.774	0.780	0.785	78 - 1	0.722	0.722	0.742
30 - 1	0.687	0.703	0.722	57 - 3	0.727	0.738	0.745	79 - 1	0.794	0.823	0.827
33 - 1	0.697	0.725	0.736	58 - 1	0.663	0.687	0.703	82 - 1	0.731	0.754	0.763
34 - 1	0.707	0.724	0.735	58 - 2	0.808	0.818	0.828	83 - 1	0.786	0.799	0.811
35 - 1	0.749	0.764	0.774	61 - 1	0.735	0.752	0.770	85 - 1	0.808	0.820	0.826
37 - 1	0.661	0.689	0.704	62 - 1	0.832	0.835	0.847	89 - 1	0.823	0.838	0.844
37 - 2	0.805	0.820	0.830	65 - 1	0.752	0.756	0.766	89 - 2	0.800	0.817	0.824
38 - 1	0.760	0.775	0.784	66 - 1	0.752	0.773	0.785	91 - 1	0.738	0.748	0.754
38 - 2	0.702	0.722	0.733	66 - 2	0.693	0.719	0.734	91 - 2	0.766	0.772	0.778
39 - 1	0.713	0.720	0.738	66 - 3	0.671	0.699	0.714	94 - 1	0.996	0.980	0.974

TAB. 2. Rapport entre valeur expérimentale $C_P^{\text{exp}}(Y)$ et valeur théorique C_P .

pour des discriminants assez grands ($2 \cdot 10^4$), la constante expérimentale est souvent de l'ordre de 75% de la constante théorique. On a représenté plusieurs valeurs de Y pour bien montrer que ce rapport augmente toutefois, mais très lentement.

5.2.2. *Étude plus fine des courbes 37A et 37B.* Nous allons étudier plus en profondeur les courbes 37A et 37B. Ces deux courbes sont intéressantes pour plusieurs raisons : elles ont même degré et même conducteur, donc devraient avoir même C_P . La courbe 37B est de rang 0 alors que la 37A est la courbe de rang 1 de plus petit conducteur.

La figure 7 représente les sommes des hauteurs des points sur les courbes 37A et 37B comparées à la valeur théorique donnée par le corollaire 4.2. Contrairement à ce que l'on avait pour les hauteurs des traces, ici les courbes ne se superposent pas du tout, ce qui était prévisible étant donné le tableau ci-dessus.

On a en particulier l'impression que la courbe 37A est nettement en-dessous de la 37B sans paraître la rejoindre alors que le corollaire 4.2 affirme que les hauteurs des points sur ces courbes elliptiques devraient être les mêmes en moyenne. Cependant, une analyse plus fine de la différence entre ces deux courbes montre qu'elle semble être en $Y^{3/2}$ et donc que les deux courbes semblent se rapprocher à une vitesse de $1/\log Y$ de la courbe théorique d'équation $Y \mapsto 0.0107Y^{\frac{3}{2}} \log Y$ ce qu'il est malheureusement difficile d'observer dans l'échelle de discriminants représentée. Autrement dit, on devine numériquement sur les courbes 37A et 37B que

$$\sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} \widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d) = C_P Y^{\frac{3}{2}} \log Y \left(1 + \mathcal{O}_{N,E} \left(\frac{1}{\log Y} \right) \right).$$

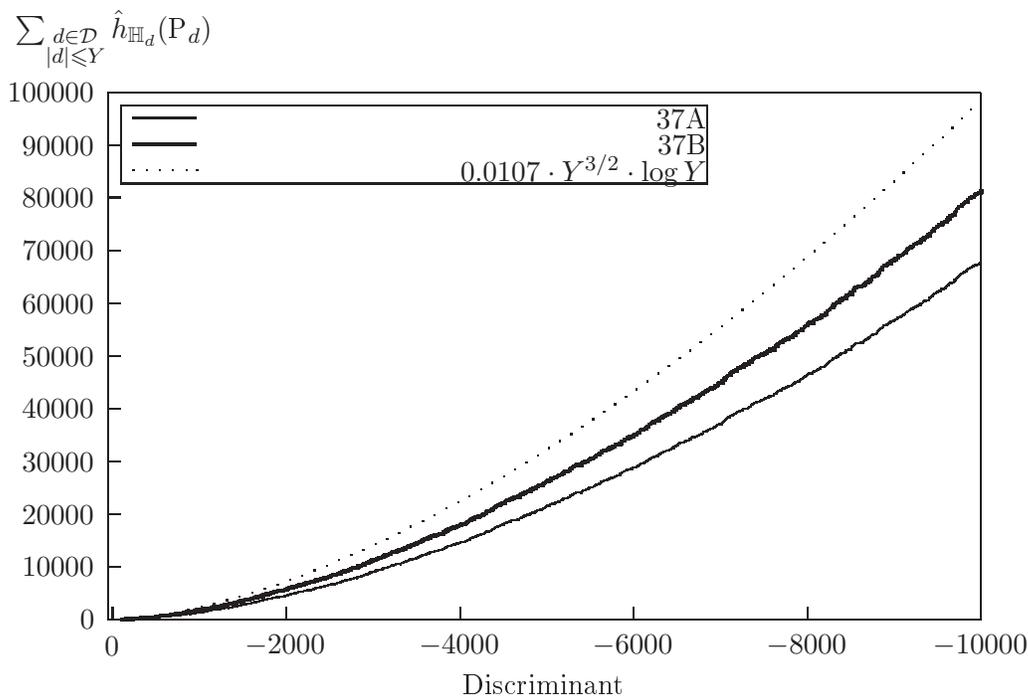


FIG. 7. Hauteur des points en moyenne sur les courbes 37A et 37B.

Selon le corollaire 4.2 et la preuve du théorème 4.1, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} \widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d) &= C_P Y^{\frac{3}{2}} \log Y + C'_P Y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3\Omega_{E,N}} Y^{\frac{1}{2}} \text{Error} + \mathcal{O}_{N,\varepsilon} \left(Y^{\frac{29}{20} + \varepsilon} \right) \\ &= C_P Y^{\frac{3}{2}} \log Y \left(1 + \frac{C'_P}{C_P} \frac{1}{\log Y} + \frac{1}{3\Omega_{E,N} C_P} \frac{\text{Error}}{Y \log Y} + \mathcal{O}_{N,\varepsilon} \left(Y^{-\frac{1}{20} + \varepsilon} \right) \right) \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et où Error est défini en (4.5). L'analyse numérique suggère donc que le terme $C'_P Y^{3/2}$ dans le développement du corollaire 4.2 est non nul et même de l'ordre du terme principal pour des petits discriminants. Ceci suggère également que

$$(5.1) \quad \text{Error} = o(NY).$$

Prouver cela nécessite de pouvoir estimer les moyennes mentionnées dans la remarque 4.1. Donnons une autre justification numérique de nos intuitions. Posons

$$\delta(Y) := \frac{1}{Y^{3/2}} \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} \left(\widehat{h}_{\mathbb{H}_d, 37B}(P_d) - \widehat{h}_{\mathbb{H}_d, 37A}(P_d) \right).$$

Le tableau 3 donne la valeur de $\delta(Y)$ pour plusieurs valeurs de Y . Ainsi, $\delta(Y)$ décroît très légèrement avec Y et semble se stabiliser. On devine alors que

$$\delta(Y) = D_E + o_{N,E}(1)$$

Y	$2 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^4$	$10 \cdot 10^4$
$\delta(Y)$	0.01337	0.01329	0.01328	0.01326	0.01324

TAB. 3. Valeurs numériques de $\delta(Y)$.

pour une constante D_E . Or, le corollaire 4.2 affirme que

$$\delta(Y) = (C'_{P,37B} - C'_{P,37A}) + \frac{1}{3Y} \left(\frac{\text{Error}_{37B}}{\Omega_{37B,37}} - \frac{\text{Error}_{37A}}{\Omega_{37A,37}} \right) + \mathcal{O}_{N,\varepsilon} \left(Y^{-\frac{1}{20}+\varepsilon} \right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$ ce qui confirme (5.1). En outre, il ne semble pas y avoir de compensation entre $C'_P Y^{\frac{3}{2}}$ et $\frac{1}{3\Omega_{E,N}} Y^{\frac{1}{2}} \text{Error}$ car sinon $\delta(Y)$ tendrait plus vite vers 0.

ANNEXE A. UN RÉSULTAT DE NON-ANNULATION POUR LES TORDUES
QUADRATIQUES PAIRES DE COURBES ELLIPTIQUES

Théorème A.1. *Si E est une courbe elliptique rationnelle de conducteur N sans facteurs carrés et de rang analytique 1 alors*

$$|\{d \in \mathcal{D}, |d| \leq Y, L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) \neq 0\}| \gg_\varepsilon Y^{1-\varepsilon}$$

lorsque Y tend vers $+\infty$ et pour tout $\varepsilon > 0$.

Remarque A.1. Ce résultat est l'analogie en rang analytique 1 du résultat de non-annulation quantitatif prouvé par H. Iwaniec ([Iw]) puis amélioré par A. Perelli et J. Pomykala ([PePo]) en rang analytique 0. En substance, ce théorème signifie que si E est une courbe elliptique rationnelle de conducteur sans facteurs carrés et de rang analytique 1 alors il existe une infinité de discriminants d dans \mathcal{D} pour lesquels la fonction L de la courbe elliptique E tordue par le caractère quadratique χ_d ne s'annule pas au point critique. Même si la preuve de ce résultat ne présente pas de nouvelles difficultés, nous avons estimé que cet article constitue une bonne opportunité de faire apparaître explicitement ce résultat de non-annulation dans la littérature.

Preuve du théorème A.1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$|\{d \in \mathcal{D}, |d| \leq Y, L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) \neq 0\}| \gg \frac{\left| \sum_{d \in \mathcal{D}} L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) F\left(\frac{|d|}{Y}\right) \right|^2}{\sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} |L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1)|^2} := \frac{M_1(Y)^2}{M_2(Y)}$$

où F est une fonction lisse à support compact dans \mathbb{R}_+ positive non identiquement nulle. Le comportement asymptotique de $M_1(Y)$ est donné par le théorème 3.3 donc il s'agit d'obtenir une bonne supérieure pour le second moment $M_2(Y)$. L'équation fonctionnelle approchée (Théorème 5.3. de [IwKo]) pour $L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1)$ s'écrit

$$L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) = (1 + \omega_d) \sum_{n \geq 1} \frac{a_n \chi_d(n)}{n} V\left(\frac{n}{|d|\sqrt{N}}\right)$$

où ω_d est le signe de l'équation fonctionnelle et vaut $\omega_{\chi_d}(-N) = +1$ et V est une fonction de troncature qui permet de dire que la somme ci-dessus est de longueur au

plus $Y^{1+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$. Comme

$$M_2(Y) \ll \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} \left| \sum_{n \ll_\varepsilon Y^{1+\varepsilon}} \frac{a_n}{n} \chi_d(n) \right|^2,$$

l'inégalité de grand crible pour les caractères quadratiques primitifs de [He-Br] assure que $M_2(Y) \ll_\varepsilon Y^{1+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ d'où le résultat. ■

ANNEXE B. DISCRÉTISATION DE LA VALEUR SPÉCIALE DES TORDUES QUADRATIQUES IMPAIRES DE COURBES ELLIPTIQUES

Cette annexe a été motivée par une observation de A. Granville et a été rendue possible par de nombreuses explications de M. Watkins et de C. Delaunay.

B.1. Conjecture du Samedi Soir selon Conrey, Rubinstein, Snaith et Watkins. L'objectif principal avoué de la prépublication [CoRuSnWa] est d'essayer de conjecturer le comportement asymptotique de

$$N(\tilde{\mathcal{D}}, Y) := \left| \left\{ d \in \tilde{\mathcal{D}}, |d| \leq Y, \omega_d = -1, r_d := \text{ord}_{s=1} L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s) \geq 3 \right\} \right|$$

où $\tilde{\mathcal{D}}$ est une certaine classe de discriminants et lorsque Y tend vers $+\infty$. Il est important d'avoir en tête que si le signe de l'équation fonctionnelle ω_d vaut -1 alors l'ordre d'annulation au point critique r_d est forcément un entier naturel impair (donc supérieur à 1). La «famille» de fonctions L intervenant dans ce problème est $\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{D}}) = \cup_{Y>0} \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{D}}, Y)$ où

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{D}}, Y) := \left\{ L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s), d \in \tilde{\mathcal{D}}, |d| \leq Y, \omega_d = -1 \right\}$$

pour tout nombre réel strictement positif Y . Le type de symétrie de \mathcal{F} est orthogonal impair ce qui, selon [CoKeRuSn], permet de conjecturer que la fonction de distribution des fonctions L de cette famille est donnée par

$$(B.1) \quad \text{Probabilité}(L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) \leq t) \asymp t^{\frac{3}{2}} \log^{\frac{3}{8}}(t)$$

lorsque t est très petit. Conjecturer le comportement asymptotique de $N(\tilde{\mathcal{D}}, Y)$ consiste alors à utiliser cette fonction de distribution conjecturale et discrétiser de façon parfois conditionnelle la valeur $L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1)$. Dans [CoRuSnWa], les auteurs décrivent la conjecture⁵ CSS(θ) où θ est un nombre réel strictement positif.

Conjecture du Samedi Soir (CSS(θ)). *Il existe un sous-ensemble «exceptionnel» \mathcal{D}_{ex} de $\tilde{\mathcal{D}}$ tel que si d est un discriminant de $\tilde{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}_{ex}$ satisfaisant $r_d = 1$ alors*

$$L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) \gg \frac{1}{|d|^\theta}$$

et $|\{d \in \mathcal{D}_{ex}, |d| \leq Y, r_d = 1\}| = o(Y)$ lorsque $Y \rightarrow +\infty$.

⁵Saturday Night Conjecture.

Ainsi, $\text{CSS}(\theta)$ signifie qu'il existe un réel $\theta > 0$ tel que $L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) \gg |d|^{-\theta}$ *statistiquement*⁶. On dit que $\theta > 0$ est *admissible* si la conjecture $\text{CSS}(\theta)$ est vraie. Le fait que θ soit admissible implique conjecturalement en tenant compte de (B.1) que

$$N(\tilde{\mathcal{D}}, Y) \asymp Y^{1-\frac{3\theta}{2}} \log^C(Y)$$

pour une constante absolue C et lorsque Y tend vers $+\infty$. Les auteurs présentent dans [CoRuSnWa] plusieurs modèles aboutissant à des valeurs admissibles différentes pour θ et leurs données numériques ne leur permettent pas de se décider. Plusieurs personnes essaient de créer des données numériques plus conséquentes qui pourraient permettre de se décider. Toutefois, il est possible de justifier cette Conjecture du Samedi Soir via la conjecture de B.J. Birch et de H.P.F. Swinnerton-Dyer ([BiSw]). Si d est un discriminant de $\tilde{\mathcal{D}}$ satisfaisant $r_d = 1$ alors

$$(B.2) \quad L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) = \frac{\Omega(E_d)}{|E_d(\mathbb{Q})_{\text{tors}}|^2} \text{Tam}(E_d) R(E_d) |\text{Sha}(E_d)|$$

où E_d est la tordue de la courbe elliptique E par χ_d , $\Omega(E_d)$ est la période réelle de E_d , $\text{Tam}(E_d)$ est le produit des nombres de Tamagawa de E_d , $E_d(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$ est le sous-groupe de torsion, $R(E_d)$ est le régulateur de E_d et $\text{Sha}(E_d)$ est le groupe de Tate-Shafarevich de E_d . La proposition 2.2 page 246 de [De2] permet d'écrire que

$$(B.3) \quad L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) \asymp \frac{1}{|d|^{\frac{1}{2}}} \text{Tam}(E_d) R(E_d) |\text{Sha}(E_d)|.$$

Il s'agit alors d'étudier la taille statistique de $\text{Tam}(E_d) R(E_d) |\text{Sha}(E_d)|$ éventuellement en se limitant à un sous-ensemble de discriminants pour lesquels $\text{Tam}(E_d)$ reste constant ce qui nécessite d'ajuster la fonction de distribution conjecturale des fonctions L donnée en (B.1). Comme $\text{Tam}(E_d) R(E_d) |\text{Sha}(E_d)| \geq \log(|d|)$, $\frac{1}{2} - \varepsilon$ est admissible pour tout $\varepsilon > 0$. Une analogie naturelle avec la formule du nombre de classe de Dirichlet nous amène à conjecturer que

$$\text{Tam}(E_d) R(E_d) |\text{Sha}(E_d)| \gg_{\varepsilon} |d|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

statistiquement pour tout $\varepsilon > 0$ et donc tout $\varepsilon > 0$ semble être admissible.

B.2. Contribution personnelle dans un cas particulier de la Conjecture du Samedi Soir. À partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette annexe, $\tilde{\mathcal{D}}$ est notre ensemble de discriminants favoris \mathcal{D} satisfaisant la «condition de Heegner» et E est une courbe elliptique rationnelle de conducteur N sans facteurs carrés et de rang analytique 0.

B.2.1. Description du modèle de B.J. Birch des points de Heegner. Comme $\text{Tr}_d = \sum_{\sigma \in G_d} P_d^{\sigma}$, on peut imaginer ([CoRuSnWa] page 4) que l'on somme h_d vecteurs unitaires à savoir $\left\{ \widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d)^{-\frac{1}{2}} P_d^{\sigma}, \sigma \in G_d \right\}$ dans un espace de dimension h_d (\mathbb{H}_d est un \mathbb{K}_d -espace vectoriel de dimension finie h_d). Le point résultant est statistiquement de norme au moins $h_d^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ ce qui se traduit par $\widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\text{Tr}_d) \gg_{\varepsilon} |d|^{-\varepsilon} \widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d)$

⁶Le terme *statistiquement* sera employé plusieurs fois et aura le même sens que celui donné dans la conjecture $\text{CSS}(\theta)$.

statistiquement pour tout $\varepsilon > 0$. Bien sûr, pour que ce modèle ait un sens, l'indépendance linéaire des points de Heegner est sous-entendue (celle-ci a été prouvée dans [RoSi] pour des points de Heegner provenant de discriminants différents). Comme le théorème 4.2 assure que

$$\widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d) \gg_\varepsilon |d|^{\frac{1}{2}} \log^{1-\varepsilon} |d|,$$

statistiquement pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc conjecturer que

$$(B.4) \quad \widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\text{Tr}_d) \gg_\varepsilon |d|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

statistiquement pour tout $\varepsilon > 0$.

B.2.2. Reformulation conjecturale de la Conjecture du Samedi Soir.

Conjecture B.1. *Si E est une courbe elliptique rationnelle de conducteur N sans facteurs carrés et de rang analytique 0 et*

$$\mathcal{D} = \{d \in \mathbb{Z}_-^*, \mu^2(d) = 1, d \equiv \nu^2 \pmod{4N}, (\nu, 4N) = 1\}$$

alors tout $\varepsilon > 0$ est admissible. Par conséquent,

$$N(\mathcal{D}, Y) := |\{d \in \mathcal{D}, |d| \leq Y, \omega_d = -1, r_d := \text{ord}_{s=1} L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s) \geq 3\}| \gg_\varepsilon Y^{1-\varepsilon}$$

lorsque Y tend vers $+\infty$.

Justification de la conjecture B.1. Soit d dans \mathcal{D} satisfaisant $r_d = 1$. La formule de Gross-Zagier (2.4) assure alors que

$$(B.5) \quad L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) \asymp \frac{1}{|d|^{\frac{1}{2}}} \widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\text{Tr}_d)$$

et suggère, en tenant compte de (B.4), que tout $\varepsilon > 0$ est admissible. ■

B.2.3. Mise en évidence d'un lien conjectural entre régulateur et groupe de Tate-Shafarevitch.

Conjecture B.2. *Si E est une courbe elliptique rationnelle de conducteur N sans facteurs carrés et de rang analytique 0 et*

$$\mathcal{D} = \{d \in \mathbb{Z}_-^*, \mu^2(d) = 1, d \equiv \nu^2 \pmod{4N}, (\nu, 4N) = 1\}$$

alors il existe un sous-ensemble «exceptionnel» \mathcal{D}_{ex} de \mathcal{D} tel que si d est un discriminant de $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{ex}$ satisfaisant $r_d = 1$ alors

$$\text{Tam}(E_d)R(E_d) |\text{Sha}(E_d)| \gg_\varepsilon |d|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

et $|\{d \in \mathcal{D}_{ex}, |d| \leq Y, r_d = 1\}| = o(Y)$ lorsque $Y \rightarrow +\infty$.

Justification de la conjecture B.2. Soient d dans \mathcal{D} satisfaisant $r_d = 1$ et R_d un générateur de $E_d(\mathbb{Q})$. Il est possible d'associer au point Tr_d de $E(\mathbb{K}_d)$ un point $\widehat{\text{Tr}}_d$ de $E_d(\mathbb{Q})$ vérifiant $\widehat{h}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\text{Tr}}_d) \asymp \widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\text{Tr}_d)$. En effet, E et E_d sont isomorphes sur \mathbb{K}_d

et il s'agit alors d'envoyer le point $\text{Tr}_d - \overline{\text{Tr}_d}$ de E sur E_d via un tel isomorphisme. Ainsi, il existe un entier relatif ℓ_d appelé *multiplicité* de $\widetilde{\text{Tr}_d}$ tel que

$$\widetilde{\text{Tr}_d} \equiv \ell_d R_d \pmod{(E_d(\mathbb{Q}))_{\text{tors}}}$$

de sorte que

$$\widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\text{Tr}_d) \asymp \widehat{h}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\text{Tr}_d}) = \ell_d^2 \widehat{h}_{\mathbb{Q}}(R_d) = \ell_d^2 R(E_d).$$

La conjecture de B.J. Birch et de H.P.F. Swinnerton-Dyer combinée avec la formule de Gross-Zagier assurent alors que

$$(B.6) \quad \text{Tam}(E_d) |\text{Sha}(E_d)| \asymp \ell_d^2$$

et que

$$(B.7) \quad \text{Tam}(E_d) R(E_d) |\text{Sha}(E_d)| \asymp \widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\text{Tr}_d) \gg_{\varepsilon} |d|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

statistiquement pour tout $\varepsilon > 0$ selon (B.4).

RÉFÉRENCES

- [AbUl] Abbas A., Ullmo E. : *À propos de la conjecture de Manin pour les courbes elliptiques modulaires*, Compositio Math. 103 :3 (1996), 269-286.
- [BiSw] Birch B.J., Swinnerton-Dyer H.P.F. : *Notes on elliptic curves. I. II.*, J. reine angew. Math. 212 (1963), 7-25, 218 (1965), 79-108.
- [Bo] Bombieri E. : *Le grand crible dans la Théorie Analytique des Nombres*, Astérisque 18 (1973).
- [CoKeRuSn] Conrey J.B., Keating J.P., Rubinstein M.O., Snaith N.C. : *On the frequency of vanishing of quadratic twists of modular L-functions*, in *Number theory for the millenium, I* (Urbana, IL, 2000), edited by M.A. Bennet, B.C. Berndt, N. Boston, H.G. Diamond, A.J. Hildebrand and W. Philips, A.K. Peters, Natick, MA (2002), 301-315, disponible à <http://www.arXiv.org/math.NT/0012043>.
- [CoRuSnWa] Conrey J.B., Rubinstein M.O., Snaith N.C., Watkins M. : *Discretisation for odd quadratic twists*, prépublication disponible à <http://www.arXiv.org/math.NT/0509428>.
- [Cr] Cremona J.E. : *Elliptic Curve Data*, disponible à <http://www.maths.nott.ac.uk/personal/jec/ftp/data/INDEX.html>.
- [DaGr] Darmon H., Green P. : *Elliptic curves and class fields of real quadratic fields : algorithms and evidence*, Exp. Math. 11(2002), 37-55.
- [De] Delaunay C. : *Formes modulaires et invariants de courbes elliptiques définies sur \mathbb{Q}* , thèse de doctorat, Université Bordeaux I (2002), disponible à <http://igd.univ-lyon1.fr/~delaunay/>.
- [De2] Delaunay C. : *Moments of the orders of Tate-Shafarevich groups*, International Journal of Number Theory, Vol. 1, No. 2 (2005), 243-264.
- [Ed] Edixhoven B. : *On the Manin constants of modular elliptic curves*, in *Arithmetic Algebraic Geometry* (Texel, 1989), edited by G. van der Geer, F. Oort, and J. Steenbrink, 25-39, Progr. Math. 89. Boston, MA : Birkhäuser Boston, 1991.
- [Gr] Gross B.H. : *Heegner Points on $X_0(N)$* , Modular Forms, ed. R.A. Rankin, Halsted Press (1984), 87-105.
- [GrZa] Gross B.H., Zagier D., *Derivatives of L-series and the height of Heegner points*, Invent. Math. 84(1986), 225-320.
- [He-Br] Heath-Brown D.R., *A mean value estimate for real character sums*, Acta Arith. 72 , no. 3, 235-275 (1995).

- [Iw] Iwaniec H., *On the order of vanishing of modular L -functions at the critical point*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6**(1990), 365-375.
- [IwKo] Iwaniec H., Kowalski E. : *Analytic number theory*, Providence R.I., Colloquium publications (American Mathematical Society) (2004).
- [Ma] Manin J., *Parabolic points and zeta functions of modular curves*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **36** (1972), 19-66.
- [Mu] Murty M.R., *Bounds for congruence primes*, Proc. Sympos. Pure Math. **66**(1999), 177-192.
- [PePo] Perelli A., Pomykala J. : *Averages of twisted elliptic L -functions*, Acta Arith. **80**, no. 2, 149–163 (1997).
- [RoSi] Rosen M., Silverman J.H. : *On the independence of Heegner points associated to distinct quadratic imaginary fields*, prépublication disponible à <http://arxiv.org/abs/math.NT/0508259>.
- [TaWi] Taylor R., Wiles A. : *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math. (2) **141** 553–572.
- [Sh] Shimura G., *On the holomorphy of a certain Dirichlet series*, Proc. London Math. Soc. **31**(1975), 79-98.
- [Si] Silverman J.H., *The arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Mathematics **106**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Wa] Watkins M., *Computing the modular degree of an elliptic curve*, Experiment. Math. **11**(2002).
- [Wa2] Watkins M., *Some remarks on Heegner point computations*, prépublication disponible à <http://arxiv.org/abs/math.NT/0506325>.
- [Wi] Wiles A. : *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. (2) **141**, 443-551.

G. Ricotta

Université de Montréal, Département de Mathématiques et de Statistique, CP 6128 succ Centre-Ville, Montréal QC H3C 3J7, Canada ; ricotta@dms.umontreal.ca
 actuel : Université de Bordeaux 1, Laboratoire A2X, Bâtiment A33, Bureau 301 M, 351 cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France ; Guillaume.Ricotta@math.u-bordeaux1.fr

T. Vidick

École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France ; thomas.vidick@ens.fr